BHS III 7

Bayerische Berg-, Hütten- und Salzwerke
Aktiengesellschaft
Bibliothek:
Gruppe: III
B.Nr. 7

Erste Gründe

der

mechanischen Wissenschaften.

Verfasset

von

Daniel Friedrich Hecht,
Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Königl. Sächs. Bergakademie, wie auch erster Lehrer an der Hauptbergschule zu Freyberg.

Mit sieben Kupfertafeln.

Freyberg,
bey Craz und Gerlach
1819.

BIBLIOTHEK DER K.B.GENERAL BERGW.U.SALINEN ADMINISTR.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Hochwohlgeboren

dem

Herrn

Herrn Sigmund August Wolfgang Freyherrn von Herder,

Königl. Sächs. Bergrath, Ritter des Königl. Sächs. Civilverdienst= ingleichen Comthur des Kön. Pohln. Stanislaiordens,

widmet

aus Dankbarkeit für mehrere erhaltene freundliche Winke zur möglichsten Anwendbarmachung mathematischer Lehren auf den Bergbau

und

zum Beweis der tiefsten Verehrung

diese kleine Schrift

in aller Unterthänigkeit

der Verfasser.

Vorerinnerung.

Die Veranlassung zu vorliegendem Werkchen ist: um bey den mir obliegenden Vorträgen über die ersten Gründe der Mechanik nicht nur überhaupt, sondern auch insbesondere so einen Leitfaden zu haben, welcher vorzüglich mit Rücksicht auf praktische Mechanik oder Maschinenlehre bearbeitet ist. Da bey der hiesigen Königl. Bergakademie durch die Vorträge über den technischen Theil der Bergbaukunst die gewöhnlichsten Bergwerksmaschinen erklärt und beschrieben werden: so habe ich deshalb auch in diesem Werkchen, so viel der Zweck erheischte, und der Raum verstattete, hierauf einige Rücksicht genommen, und denjenigen, freylich bey weitem größeren Theile, unsrer künftigen Geschäfftsmänner des Bergbaues, welche den Lehrkursus der

höhern Mathematik — freylich die wahre und eigentliche Mechanik — wegen andrer ihnen mehr bedürfender Theile der bergmännischen Wissenschaften nicht nur nicht hören, sondern auch darin nicht fortstudiren können, zu zeigen gesucht, wie sie für ihr Bedürfniß jene ihnen erklärten Maschinen berechnen und etwa schon erbaute mit ziemlicher Sicherheit beurtheilen können. Deshalb war es auch nothwendig, einzelne Rechnungsbeyspiele von Maschinen hier einzuschalten, wo nun jedoch dem mündlichen Vortrage nicht nur mehrere Maschinen zu betrachten, sondern auch die Theorien zu ihrer Berechnung weiter aus einander zu setzen, vorbehalten werden.

Obgleich in diesem Werkchen eben keine großen Beyträge zur Mechanik vorkommen, indem ich außer einigen von mir aufgefundenen und aufgestellten Sätzen vorzüglich noch das, was ich zu meinem Zwecke bedurfte, aus den Werken unsrer berühmtesten Schriftsteller über Mechanik, z. B. aus den Werken eines v. Busse, Eytelwein's, Langsdorf's ꝛc. geschöpft habe: so hoffe ich doch durch die Art und Weise der Aufstellung und Anwendung der vorgetragenen Lehren manchem unsrer jungen Maschinen- oder Werkleute ein Werkchen in die

Hände gegeben zu haben, das sie wohl ohne Befriedigung nicht bey Seite legen dürften, ohne es immer wieder zu ergreifen. Und eben so erwarte ich, von obigen Gesichtspuncten ausgehend, den Beyfall der Sachverständigen, wie er mir bey meinen frühern mathematischen Arbeiten schon zu Theil wurde.

Uebrigens wird noch erinnert, daß ich bey der Berechnung der Menschen- und Thierkräfte §. 120. Zus. mich der beyden Eulerschen Formeln um deshalb bedient habe, weil, wie schon dort erwähnt ist, die erste derselben vorzüglich dem Haspel, Handgöpel u. s. w., die letztere hingegen dem Pferdegöpel entspricht, wie eine Menge von mir angestellter Beobachtungen und darnach berechneter Beyspiele über erbaute Maschinen in unsrer Bergwerksrefier beweisen, und welche Rechnungen jedem zur Einsicht vorgelegt werden können.

Schlüßlich muß noch bemerkt werden, daß man bey der Erläuterung der vorgetragenen Lehren in diesem Werkchen, wenn öfters auf Lehrbücher der Arithmetik und Geometrie verwiesen worden ist, darunter meine Lehrbücher der Arithmetik und

Geometrie, welche in den Jahren 1812. und 1814. in der hiesigen Craz- und Gerlachschen Buchhandlung erschienen, zu verstehen hat.

Freyberg, im Monat Juny 1819.

D. Fr. Hecht.

Inhaltsanzeige.

(Die Ziffern bedeuten die Seitenzahlen.)

Einleitung. 1.

I. Erste Gründe der Statik fester Körper. 11.

Erstes Kapitel. Vom Gleichgewicht mehrerer Kräfte, welche auf einen Punct wirken. 11.

Zweytes Kapitel. Vom Hebel. 21.

Drittes Kapitel. Von der Reibung. 40.

Viertes Kapitel. Von der Rolle, den Rollen- und Flaschenzügen, so wie von dem Rade an der Welle. 44.

Fünftes Kapitel. Von der schiefen Ebene, dem Keile und der Schraube. 61.

Sechstes Kapitel. Von dem Räderwerke und dem Pochwerke. 73.

II. Erste Gründe der Hydrostatik. 95.

III. Erste Gründe der Aerostatik. 112.

Erster Anhang. Höhenmessen mit dem Barometer. 127.

Zweyter Anhang. Von der Elasticität der Wasserdämpfe. 134.

IV. Erste Gründe der Dynamik. 137.

Erstes Kapitel. Von der gleichförmigen Bewegung. 138.

Zweytes Kapitel. Von der beschleunigten Bewegung und dem freyen Falle der Körper. 143.

Drittes Kapitel. Von der Bahn geworfner Körper. 149.

Viertes Kapitel. Von den Wirkungen der Kräfte. 154.

Fünftes Kapitel. Vom Stoße der Körper. 160.

Sechstes Kapitel. Vom freyen Falle der Körper auf einer schiefen Ebene. 166.

Siebentes Kapitel. Von der Kreisbewegung. 171.

Achtes Kapitel. Vom Pendel. 193.

V. Erste Gründe der Hydraulik. 198.

Erstes Kapitel. Von dem Ausflusse des Wassers durch Oeffnungen in dem Boden oder in den Wänden eines Behälters. 199.

Zweytes Kapitel. Von der Bewegung des Wassers in Flußbetten. 222.

Drittes Kapitel. Von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen. 235.

Viertes Kapitel. Von den springenden Wassern. 251.

Fünftes Kapitel. Vom Stoße oder hydraulischen Druck des Wassers. 257.

Sechstes Kapitel. Kurze Betrachtung einiger hydraulischen Maschinen. 264.

VI. Erste Gründe der Aerodynamik. 303.

Anzeige zur Berichtigung.

S. 9. Z. 1. von unten setze man Kiefernholz 0,600 statt 7,788. S. 19. Z. 6. von oben ist nach dem Worte „der“ einzuschalten: Mittelkraft von den. S. 33. Z. 10. v. unten setze man $\frac{P \cdot CA}{CE}$ statt $\frac{PCA}{CE}$. S. 46. Z. 1. v. u. s. m. 1890 Pfund statt 1632 Pfd. S. 66. Z. 12. v. o. s. m. $Q = W + W' + W''$ statt $W + W + W'$. S. 68. Z. 19. v. o. s. m. Keils statt Kils. S. 72. Z. 6. v. o. s. m. $\frac{wa}{2A\pi \cdot a} Q + \frac{a}{A} \cdot \mu \cdot \frac{Q}{\cos\alpha} = Q\left(\frac{w}{2a\pi} + \frac{\mu}{\cos\alpha}\right) \cdot \frac{a}{A}$ statt $\frac{w \cdot Q}{2A\pi} + \mu \cdot \frac{Q}{\cos\alpha} = Q\left(\frac{wa}{2a\pi \cdot A} + \frac{\mu}{\cos\alpha}\right)$. S. 72. Z. 7. v. o. 3) $P' = Q \cdot \frac{a}{A}\left(\tan\alpha + \frac{\mu}{\cos\alpha}\right)$ statt $Q\left(\frac{a}{A} \cdot \tan\alpha + \frac{\mu}{\cos\alpha}\right)$. S. 75. Z. 13. v. o. s. m. $\frac{R'}{r'} \cdot P'$ statt $\frac{R'}{r} \cdot P'$. S. 88. Z. 12. v. u. ist nach BA einzuschalten: an eine Scheibe. S. 101. Z. 1. 3. und 4. v. u. setze man γ' statt γ. S. 121. Z. 13. v. o. s. m. fA statt FA. S. 155. Z. 4. v. o. ist nach dem Worte „muß“ einzuschalten: die Wirkungen mehrerer. S. 161. Z. 4. v. u. sind die Kommazeichen wegzustreichen. S. 164. Z. 12. u. 13. v. o. setze man mußte, behält derselbe daher statt mußte; daher behält derselbe. S. 177. Z. 16. v. o. s. m. $AD = l'$ statt $AD = l$. S. 189. Z. 11. v. u. Nimmt statt Nennt. S. 196. Z. 6. v. o. s. m. $g : g'$ statt $g : g$. S. 231. Z. 18. v. o. s. m. $c = 95{,}77 \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$ statt $c = 95{,}77 \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)$. S. 249. Z. 8. v. o. s. m. §. 133. Zus. II. statt §. 134. S. 255. Z. 2. v. u. s. m. $\alpha^2 \cdot h$ statt $\alpha^2 \cdot \sqrt{h}$. S. 260. Z. 11. v. u. s. m. engegeschaufelten statt eingeschaufelten. S. 267. Z. 15. v. o. s. m. radialem st. radicalem.

Einleitung.

§. 1.

Erklärung. Die Mechanik ist die Wissenschaft, welche von den Wirkungen der Kräfte und von den dadurch veranlaßten Bewegungen der Körper handelt.

Anmerkung. In der Naturlehre, in welcher die Mechanik ein wichtiger Abschnitt ist, theilt man die Körper in Hinsicht des Zusammenhangs ihrer Theile in feste, tropfbar flüssige oder unelastisch flüssige und elastisch flüssige ab.

Fest ist ein Körper, wenn zur Trennung seiner Theile eine merkliche Kraft erfordert wird; flüssig aber, wenn seine Theile mit der kleinsten Kraft sich verschieben lassen, wobey er jedoch als eine zusammenhängende Masse im Ganzen erscheint. Elastisch heißt ein Körper, der seine durch äußern Druck bewirkte Veränderung der Gestalt von selbst wieder herstellen kann.

Nach dieser Eintheilung der Körper zerfällt daher die Mechanik in mehrere einzelne Wissenschaften, welche man eben unter dem Namen der mechanischen begreift.

Die mechanischen Wissenschaften betrachten aber die Kräfte der Körper,

I. wie sie einander das Gleichgewicht [§. 5.] halten, in den statischen Wissenschaften. Diese handeln
   1) in der Stereostatik oder der Statik fester Körper von den allgemeinen Gesetzen des Gleichgewichts bey festen Körpern, z. B. den Gewichten;
   2) in der Hydrostatik von dem Gleichgewichte tropfbar flüssiger Körper, z. B. des Wassers;
   3) in der Aerostatik von dem Gleichgewichte elastischer Flüssigkeiten, z. B. der Luft.

II. wie sie Bewegungen [§. 2.] hervorbringen, in den dynamischen Wissenschaften. Diese handeln
1) in der Stereodynamik oder Dynamik der festen Körper von den allgemeinen Gesetzen der Bewegung bey festen Körpern;
2) in der Hydrodynamik oder Hydraulik von der Bewegung tropfbar flüssiger Körper;
3) in der Aerodynamik oder Pnevmatik von der Bewegung elastischer Flüssigkeiten.

§. 2.

Erklärung. Die Bewegung eines Körpers ist die Veränderung des Ortes oder der Stelle, die er im Raume einnimmt, oder auch die Veränderung der Lage der Theile seiner Oberfläche in Rücksicht andrer Körper.

Ein Körper bewegt sich daher, so lange er seinen Ort oder die Lage der Theile seiner Oberfläche beständig verändert, und ruhet, so lange er seinen Ort oder seine Lage unverändert beybehält.

Die gerade Linie, in welcher sich ein Körper bewegt, heißt die Richtung seiner Bewegung; ist der Weg aber eine krumme Linie, so ist die Tangente [Geom. §. 86.] in demjenigen Puncte des Weges, wo sich der Körper befindet, seine Richtung.

§. 3.

Erklärung. Die Ursache jeder Veränderung in dem Zustande eines Körpers heißt Kraft. Die gerade Linie, nach welcher die Kraft wirkt oder zu wirken strebt, heißt die Richtung der Kraft.

§. 4.

Erklärung. Dasjenige, wodurch die Bewegung eines Körpers ganz oder zum Theil aufgehoben wird, nennt man Widerstand. Das, was

alsdann der Widerstand leidet, heißt Druck, und die gerade Linie, nach welcher die drückende Kraft den Körper bewegen würde, die Richtung des Drucks.

Ist ein Körper schon durch eine Kraft bewegt, und er trifft plötzlich einen Widerstand, so heißt die Wirkung Stoß.

§. 5.

Erklärung. Sind mehrere Kräfte so an einem Körper angebracht, daß sich ihre Wirkungen aufheben und keine Bewegung des Körpers erfolgt, so nennt man diese Kräfte entgegengesetzte, und sagt von ihnen: diese Kräfte sind im Gleichgewicht [§. 1. Anmerk.].

Anmerkung. Jeden Widerstand [§. 4.] kann man als eine entgegengesetzte Kraft ansehen, welche der eigentlichen Kraft ganz oder zum Theil gleich und entgegengesetzt ist.

§. 6.

Erklärung. Dasjenige, was den Raum eines Körpers ausfüllt, nennt man seine Materie, und die Menge der Materie, welche in dem Körper enthalten ist, seine Masse.

Anmerkung. Bey einer eisernen Kugel ist Eisen die Materie, die Kugel der Körper, und die Menge des Eisens die Masse.

§. 7.

Erfahrung und Erklärung. Die Körper, mit welchen wir Versuche anstellen können, verursachen gegen ihre Unterlage einen Druck [§. 4.], und wenn diese Unterlage weggenommen wird, so fallen sie. Die Ursache dieses Druckes und der

Bewegung ist eine Kraft [§. 3.], welche die Schwerkraft oder Schwere genannt wird, so wie die Größe des Drucks, welchen ein Körper vermöge der Schwerkraft gegen seine Unterlage ausübt, sein Gewicht heißt.

Anmerkung I. Man nennt auch die schweren Körper selbst Gewichte, wenn man bey denselben nichts weiter als die bestimmte Größe des Drucks gegen dasjenige betrachtet, was einen solchen Körper herabzufallen hindert.

Anmerkung II. Wäre der Druck, welchen ein Gewicht gegen seine Unterlage äußert, eben so groß als die Wirkung einer Kraft, z. B. einer Stahlfeder rc. gegen eben diese Unterlage, so ist es in Hinsicht der Wirkung auf diese Unterlage einerley, ob das Gewicht oder die Kraft angebracht wird, und man kann daher auch ein Gewicht als eine Kraft ansehen, und es andern Kräften gleichsetzen.

§. 8.

Erklärung. Je mehr Masse [§. 6.] gleichgroße Körper enthalten, desto dichter nennt man sie; daher man die Dichtigkeit eines Körpers nach der Masse, welche er in einem bestimmten Raume enthält, und die Masse nach ihrem Gewichte beurtheilt.

Zusatz I. Nehmen daher zwey Körper einerley Raum ein, so verhalten sich ihre Dichtigkeiten wie ihre Massen oder ihre Gewichte, und umgekehrt, ihre Gewichte bey gleichen Räumen wie ihre Dichtigkeiten. Wenn z. B. ein Cubikfuß Eisen siebenmal so viel wiegt, als ein Cubikfuß Eichenholz, so wird erstrer siebenmal so viel Materie enthalten als letztrer, oder Eisen wird siebenmal dichter als Eichenholz seyn.

Zusatz II. Haben alle einzelne gleichgroße Theile eines Körpers einerley Gewicht, so kann man der Materie desselben eine gleichförmige Dichtigkeit zuschreiben. Ist alsdann das Gewicht von einem bestimmten Theile eines Körpers, dessen Materie gleichförmig dicht oder homogen ist, bekannt, so läßt sich daraus auf das Gewicht des ganzen Körpers schließen, wes-

halb es sehr wichtig ist, von mehrern Körpern, wenn man deren Materie als homogen annehmen kann, die Gewichte zu kennen, weil sich daraus das Gewicht eines Körpers von jeder Gestalt leicht finden lässt.

Anmerkung I. Von der Dichtigkeit der Körper hängt auch die Festigkeit eines Körpers oder die Stärke des Zusammenhangs ab, als worunter man die Kraft versteht, welche angewendet werden muß, um die Theile eines Körpers zu trennen. Diese Kraft ist aber verschieden, je nachdem man den Körper zu zerreissen, zu zerbrechen oder zu zerdrücken sucht. Die erstere nennt man die absolute Festigkeit, die zweyte die relative oder respective Festigkeit, und die dritte die rückwirkende Festigkeit des Körpers.

Anmerkung II. Bey Materien von ganz gleicher Art verhält sich die absolute Festigkeit zweyer prismatischer oder cylindrischer Körper wie die Größe ihrer Querschnitte, und also bey ganz geraden Cylindern wie die Quadrate der Durchmesser [Geom. §. 170. Zus. I.].

Verfertiget man sich also Prismen oder Cylinder von einem gewissen Querschnitt, z. B. 1 Quadratzoll, befestiget diese Körper mit dem einen Ende, und hängt an das andere so lange Gewichte, bis der Körper zerreisst: so ist alsdann die Summe der angehängten Gewichte nebst dem Gewichte desjenigen Stücks vom Körper, welches abgerissen ist, die absolute Festigkeit für den Querschnitt der Bruchfläche des Körpers, hier z. B. für 1 Leipziger Quadratzoll.

Nennt man diese absolute Festigkeit für 1 Quadratzoll $= k$ Pfunde, den Querschnitt jedes andern Prismas oder Cylinders $= W$ Quadratzolle, und die dem Querschnitt W zugehörige absolute Festigkeit $= K$ Pfunde, so ist allgemein $K = k \cdot W$, und $W = \frac{K}{k}$.

Aus vielfältigen von Muschenbroek und von Sickingen angestellten Versuchen ergibt sich für k die (mittlere) absolute Festigkeit für

Aepfelbaumholz	=	8012	Leipz.	Pf.
Buchenholz	=	17297	=	=
Eisen, gegossenes	=	57050	=	=
= geschmiedetes	=	62657	=	=
Fichten-, Kiefern- oder Tannenholz	=	14460	=	=
Seile, von Hanf gedreht	=	7290	=	=
Stahl	=	92260	=	=
Weißdornholz	=	14869	=	=

In der Ausübung bringt man der Sicherheit halber bey Metallen nur die Hälfte, bey Holzarten und Seilen nur den dritten Theil der Werthe für k in Rechnung. In diesen Fällen wird

für Metalle — für Hölzer und Seile

1) $K = \frac{k \cdot W}{2}$, $K = \frac{k \cdot W}{3}$

2) $W = \frac{2\,K}{k}$, $W = \frac{3\,K}{k}$, und

für Cylinder der Durchmesser

3) $D = \sqrt{\frac{8 \cdot K}{\pi \cdot k}}$, $D = \sqrt{\frac{12 \cdot K}{\pi \cdot k}}$, wo $\pi = 3{,}141$.

Die Stärke eines Kettengliedes, woran eine Last K hängt, beträgt [s. Aufgaben aus der angew. Mathematik von J. A. Eytelwein, Berlin 1793. 8.]

4) $D = \sqrt{\frac{4 \cdot K}{\pi \cdot k}}$.

Beyspiel I. Wenn an einem Bergseile eine Last von 300 Pf. angehängt werden soll, so muß seine Stärke nach 3) $= D = \sqrt{\frac{12 \cdot K}{\pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 300}{3{,}141 \cdot 7290}} = 0{,}3965$ Zoll, also beynahe $\frac{2}{5}$ Zoll betragen.

Beyspiel II. An einer fichtnen prismatischen Kunststange hängt eine Last von 15000 Pfund; also muß ihr Querschnitt nach 2) $= W = \frac{3\,K}{k} = \frac{3 \cdot 15000}{14460} =$ 3,112 □Zoll betragen.

Beyspiel III. Mittelst eines eisernen Göpelseiles soll eine Last von 4000 Pfund gefördert werden. Es müßte demnach jedes Kettenglied nach 4) $= D = \sqrt{\frac{4K}{\pi k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4000}{3{,}141 \cdot 62657}} = 0{,}2851$ Zoll, beynahe $\frac{3}{10}$ Zoll stark seyn.

Anmerkung III. Die relative Festigkeit zweyer Parallelepipeden von einerley Materie steht in geradem Verhältniß ihrer Breiten, dem quadratischen ihrer Höhen oder Dicken, und in dem umgekehrten Verhältniß ihrer Längen. Bey Cylindern also in dem geraden Verhältniß der Würfel ihrer Durchmesser und dem umgekehrten Verhältniß ihrer Längen; ein Satz, der seine Anwendung findet, wenn horizontal liegende Balken Lasten tragen sollen.

Nennt man also bey zwey parallelepipedischen Körpern die Längen, Breiten und Dicken L, l, B, b und D, d in einerley Maß, und die relativen Festigkeiten K und k, so ist $k : K = \frac{b \cdot d^2}{l} : \frac{B \cdot D^2}{L}$. Also $K = \frac{l \cdot k}{b \cdot d^2} \cdot \frac{BD^2}{L}$.

Allein für die Ausübung darf man nur der Sicherheit wegen die Hälfte von K anrechnen; daher für Parallelepipeden

1) $K = \frac{1 \cdot k}{2b \cdot d^2} \cdot \frac{BD^2}{L}$, und für Cylinder

2) $K = \frac{1 \cdot k}{2 \cdot d^3} \cdot \frac{D^3}{L}$.

Beyspiel I. Ein Cylinder von Fichtenholz, welcher 7 Leipziger Fuß lang und 1 Zoll stark ist, kann 100 Pfund tragen; daher wird ein 9 Zoll starker und 8 Fuß langer Rundbaum tragen können nach 2) $K = \frac{1k \cdot D^3}{2\,d^3 \cdot L} = \frac{7 \cdot 12 \cdot 100}{2 \cdot 1^3} \cdot \frac{9^3}{8 \cdot 12} = \frac{700 \cdot 729}{16} = 31893$ Pfund.

Beyspiel II. Nach voriger Voraussetzung hätte daher ein 8 Fuß langer Rundbaum, welcher eine Last von 200 Pfund tragen soll, nur eine Stärke von $D = \sqrt[3]{\frac{2\,L \cdot K \cdot d^3}{1 \cdot k}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 8 \cdot 200 \cdot 1^3}{7 \cdot 100}} = \sqrt[3]{\frac{32}{7}} = 1{,}659$ Zoll nöthig.

Anmerkung IV. Die rückwirkende Festigkeit zweyer Parallelepipeden von einerley Materie steht in dem geraden Verhältniß ihrer Breiten, dem cubischen ihrer Dicken, und dem umgekehrten Verhältniß der Quadrate ihrer Längen.

Bezeichnen k, K die rückwirkenden Festigkeiten, und l, b, d, L, B, D die Längen, Breiten und Dicken zweyer Parallelepipeden von einerley Materie: so verhält sich $k : K = \frac{bd^3}{l^2} : \frac{BD^3}{L^2}$, und daher $K = \frac{k \cdot l^2}{bd^3} \cdot \frac{BD^3}{L^2} = \mu \cdot \frac{BD^3}{L^2}$ Pfund.

Nach hierüber angestellten Versuchen kann man bey

Kiefern- und Fichtenholz für μ	= 1552642
Eichenholz	= 1953875
Tannenholz	= 1093661
Buchenholz	= 1902139

setzen.

Beyspiel. Wie viel wird ein 5 Ellen langer und 8 Zoll starker Stempel von Fichtenholz tragen können? Hier ist L = 5 Ellen = 10 Fuß, B = D = 8 Zoll = 0,66 Fuß; also $K = \mu \cdot \frac{D^4}{L^2} = 1552642 \cdot \frac{0{,}66^4}{10^2} = 2946$ Pfund.

§. 9.

Erklärung. Sind die Materien zweyer gleichgroßer Körper homogen, aber die Gewichte derselben verschieden: so sagt man, die Materie desjenigen Körpers, welcher das meiste Gewicht

hat, besitzt mehr eigenthümliches oder specifisches Gewicht als die Materie des andern Körpers.

Das Gewicht [§. 7.] einer Materie von einem unbestimmten Raume heißt das absolute Gewicht derselben.

Zusatz I. Um die eigenthümlichen Gewichte mehrerer Materien zu finden, darf man nur Körper von einerley Größe, z. B. von einem Cubikfuß, Cubikzoll rc., in Hinsicht ihrer Gewichte mit einander vergleichen; und wenn man das Gewicht von einem derselben als Einheit annimmt, und alsdann ausmittelt, wie vielmal das Gewicht der übrigen Körper größer oder kleiner ist, als das Gewicht des zur Einheit angenommenen Körpers: so hat man dadurch ein bequemes Mittel, die eigenthümlichen Gewichte verschiedner Materien zu vergleichen.

Zusatz II. Da das reine Regen- oder destillirte Wasser wegen seiner gleichförmigen Dichtigkeit den Vorzug unter allen bekannten Materien behauptet, so hat man allgemein das Gewicht desselben als Einheit zur Vergleichung mit den Gewichten andrer Körper angenommen.

Es sey also γ das Gewicht von einem Cubikfusse destillirten oder Regenwassers, und G das Gewicht von einem Cubikfusse irgend einer andern Materie: so erhält man, wenn g das specifische Gewicht dieser Masse bezeichnet, allgemein

$$\gamma : G = 1 : g,$$

also $g = \frac{G}{\gamma}$; d. h. **man findet das eigenthümliche oder specifische Gewicht einer Materie, wenn man das Gewicht von einem Cubikfuß dieser Materie durch das Gewicht eines Cubikfusses Wasser dividirt.**

Zusatz III. Bezeichnet man allgemein

durch γ das Gewicht eines Cubikfusses destillirten Wassers = 48,883 Leipziger Pfunde [s. des Herrn Bergcommissionrath von Busse Wassersäulenmaschine, Freyberg 1804. S. 55.];

„ P das absolute Gewicht eines andern Körpers in Pfunden ausgedrückt;

„ V den Inhalt dieses Körpers in Cubikfussen;

„ G das Gewicht von einem Cubikfuß dieses Körpers, und

„ g das eigenthümliche Gewicht von der Materie desselben:

so erhält man nach vorigem Zusatze das Gewicht von einem Cubikfusse oder

1) $G = g \cdot \gamma = g \cdot 48{,}883$ Pfund.

Es verhält sich aber

$$1 : V = G : P,$$

daher findet man das absolute Gewicht eines Körpers

2) $P = V \cdot G = V \cdot g \cdot \gamma = 48{,}883 \cdot V \cdot g$ Pfund.

Hieraus den körperlichen Inhalt oder

3) $V = \frac{P}{G} = \frac{P}{g \cdot \gamma} = \frac{P}{48{,}883 \cdot g}$ Cubikfuß.

Beyspiel I. Das eigenthümliche oder specifische Gewicht des Bleyes ist 11,325, daher das Gewicht eines Cubikfusses Bley $= G = g \cdot 48{,}883 = 11{,}325 \cdot 48{,}883 = 553{,}6$ Pfund.

Beyspiel II. Der Inhalt einer eisernen Kolbenröhre betrage 0,8 Cubikfuß. Da nun das specifische Gewicht des gegossenen Eisens 7,2, so ist das absolute Gewicht der Kolbenröhre $= P = 48{,}883 \cdot V \cdot g = 48{,}883 \cdot 0{,}8 \cdot 7{,}2 = 281{,}5$ Pfund.

Beyspiel III. Das Gewicht eines gußeisernen Krummzapfens sey 8 Centner = 880 Pfund, so ist der Inhalt desselben $= V = \frac{P}{48{,}883 \cdot g} = \frac{880}{48{,}883 \cdot 7{,}2} = 2{,}5$ Cubikfuß.

Tafel

zur Vergleichung des eigenthümlichen oder specifischen Gewichts einiger Materien, das Gewicht des destillirten Wassers als Einheit = 1,000 angenommen.

Ahornholz	=	0,755	Ebenholz	=	1,330
Basalt	=	2,662	Eichenholz	=	0,693
Bier, braunes	=	1,034	Eis	=	0,916
Birkenholz	=	0,640	Eisen, gegossenes	=	7,200
Birnbaumholz	=	0,661	= geschmied.	=	8,280
Bley	=	11,325	Erde, lehmichte	=	2,063
Bleyglanz	=	7,435	Erlenholz	=	0,574
Brandwein, gemeiner	=	0,837	Fichtenholz	=	0,490
			Gold, das reinste	=	19,640
Büchenholz	=	0,666	Hornstein	=	2,740
Butter	=	0,943	Kalkmörtel	=	1,700
Dachschiefer,	=	3,500	Kiefernholz	=	7,788

Kupfer	= 7,788	Schwefelkies	= 4,900
Kupferkies	= 4,315	Schwerspath	= 4,496
Lehm, mit Stroh vermischt	= 1,190	Silber	= 10,500
Luft, atmosph.	= 0,0012	Stahl	= 7,820
Marmor	= 2,840	Steinkohle	= 1,500
Messing	= 8,396	Stroh	= 0,125
Mühlenstein	= 2,490	Tannenholz	= 0,450
Porphyr	= 2,395	Thon	= 1,800
Quarz	= 2,763	Thonschiefer	= 3,500
Quecksilber	= 14,000	Wacke	= 2,980
Regenwasser	= 1,000	Wasser, destill.	= 1,000
Sand, aus Bächen	= 1,900	Weidenholz	= 0,585
Sandstein	= 1,970	Wismuth	= 9,020
		Ziegel, gebrannter	= 2,200
		Zinn	= 7,290

§. 10.

Erklärung. Die Richtung, nach welcher ein Körper frey fällt, oder die Linie, welche ein sehr dünner Faden angibt, an welchem ein schwerer fester Körper frey herabhängt (ein Senkbley), heißt eine **verticale, lothrechte** oder **senkrechte** (seigre) Linie. Eine Ebene durch diese Linie gelegt, heißt eine **Verticalebene**, so wie eine auf der Verticallinie normale Linie eine **horizontale** oder **waagrechte** (söhlige) Linie [Geom. §. 100. Anm.] genannt wird.

Horizontalebenen sind die, welche auf der Verticallinie winkelrecht oder normal [Geom. §. 175.] stehen.

I.

Erste Gründe der Statik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Vom Gleichgewichte mehrerer Kräfte, welche auf einen Punct wirken.

§. 11.

Grundsatz. Die Wirkung einer Kraft auf einerley Punct eines festen Körpers bleibt bey unveränderter Richtung unverändert, in welchem Puncte ihrer Richtung diese Kraft auch angebracht werden mag, wenn nur der Punct, an welchem die Kraft unmittelbar wirkt, mit dem festen Puncte des Körpers in eine unzertrennliche Verbindung gesetzt ist.

§. 12.

Grundsatz. Zwey gleiche Kräfte, welche auf einen Punct nach gerade entgegenge-

setzten Richtungen wirken, heben sich gegenseitig auf oder halten einander im Gleichgewicht; und wenn umgekehrt zwey Kräfte in gerade entgegengesetzten Richtungen ohne Mitwirkung einer dritten Kraft einander im Gleichgewicht halten, so sind diese beyden Kräfte einander gleich.

Zusatz I. Sind zwey Kräfte, welche auf einen gemeinschaftlichen Punct in gerade entgegengesetzter Richtung wirken, ungleich: so kann kein Gleichgewicht erfolgen, sondern es wird nach der Richtung der größern Kraft hin eine dritte Kraft (die Ueberwucht) erzeugt werden, welche der Differenz beyder Kräfte gleich ist; und eine einzige eben so große Kraft als die Ueberwucht nach der Richtung der kleinern Kraft angebracht, wird mit der neu erzeugten Kraft oder der Ueberwucht im Gleichgewicht seyn.

Zusatz II. Mehrere Kräfte, welche nach einerley Richtung auf einen gemeinschaftlichen Punct wirken, vereinigen sich zu einer einzigen Kraft, welche der Summe dieser Kräfte gleich ist; daher wird auch eine einzige eben so große Kraft, nach gerade entgegengesetzter Richtung angebracht, mit sämmtlichen Kräften im Gleichgewicht seyn.

Zusatz III. Wenn verschiedene an einem Punct angebrachte Kräfte im Gleichgewichte sind, und man fügt neue Kräfte hinzu, welche ebenfalls unter sich das Gleichgewicht halten: so müssen sämmtliche Kräfte unter einander im Gleichgewichte seyn. Eben so folgt, daß, wenn mehrere Kräfte im Gleichgewichte sind, und man einige von denselben, die unter sich im Gleichgewichte stehen, wegnimmt, hierdurch das Gleichgewicht der übrigen nicht gestört werden kann.

§. 13.

Grundsatz. Befinden sich mehrere Kräfte im Gleichgewicht, so werden auch andere Kräfte im Gleichgewichte seyn, wenn sie den

erstern proportional sind, und in eben den Richtungen gegen einander wirken.

Zusatz I. Wären die drey Kräfte P, Q, R, welche nach verschiednen Richtungen an einem Puncte wirken, mit einander im Gleichgewicht, so wird dieß auch von den Kräften p, q, r gelten, wenn sie nach gleichen Richtungen an demselben Punct angebracht sind, und dabey sich $p : q : r = P : Q : R$ verhält. Auch ist es leicht, wenn eine von den Kräften p, q, r gegeben ist, die beyden übrigen mit Hilfe der bekannten Kräfte P, Q, R zu finden. Wenn z. B. r gegeben wäre, so hat man

$$R : P = r : p \text{ und } R : Q = r : q,$$

$$\text{daher } p = \frac{r}{R} \cdot P \text{ und } q = \frac{r}{R} \cdot Q.$$

Zusatz II. Mehrere Kräfte, welche nach verschiednen Richtungen auf einen Punct wirken, erhalten den Punct in Ruhe, wenn sie im Gleichgewichte sind. Wäre kein Gleichgewicht vorhanden, so muß sich der Punct bewegen, und weil ein und derselbe Punct in einer gewissen Zeit nur einerley Weg durchlaufen kann, so kann auch die Richtung des Drucks, welche aus sämmtlichen Kräften entspringt, nur nach einer und derselben Linie erfolgen.

Zusatz III. Die Größen und Richtungen der Kräfte lassen sich bequem durch Längen und Lagen gerader Linien darstellen, und so oft die für sämmtliche Kräfte gemeinschaftliche Einheit in jeder einzelnen Kraft enthalten ist, so oft muß auch irgend eine gerade Linie, welche als Einheit angenommen wird, in jeder der Linien, welche die einzelnen Kräfte darstellen, enthalten seyn.

§. 14.

Erklärung. Wirken zwey gleiche oder ungleiche Kräfte P, Q nach den Richtungen AP, AQ [Tab. I. Fig. 1.], welche nicht in eine gerade Linie fallen, auf einen Punct A, so können sie einander nicht im Gleichgewicht erhalten, weil keine Kraft den Druck der andern ganz aufhebt. Es muß daher von beyden Kräften ein Druck nach irgend ei-

ner Richtung AR entstehen, welche in der durch den Winkel PAQ gelegten Ebene liegen muß [§. 13. Zus. II. und Geom. §. 174.].

Diese Richtung AR, nach welcher sich der Punct A durch die Wirkung der beyden Kräfte P, Q fortzubewegen strebt, heißt die mittlere Richtung dieser Kräfte, und eine dritte Kraft R, welche den Punct A nach der Richtung AR eben so stark drückt, als die beyden Kräfte P, Q zusammen, heißt die **Mittelkraft** oder **mittlere Kraft** von den Seitenkräften P, Q.

Weil im Zustande des Gleichgewichts die Mittelkraft R den Punct A eben so stark nach AR drückt, wie die Seitenkräfte P, Q zusammen: so muß auch eine Kraft R, welche nach einer der Mittelkraft gerade entgegengesetzten Richtung RA angebracht wird, den Punct A in Ruhe erhalten, wenn an demselben keine andern Kräfte als P, Q wirken. Daher sind unter diesen Umständen die drey Kräfte P, Q und R am Puncte A im Gleichgewichte, wenn letztere an dem gemeinschaftlichen Puncte A nach gerade entgegengesetzter Richtung AR' angebracht wird. Eben so folgt, daß man in Absicht des Druckes auf den Punct A, anstatt der Seitenkräfte P, Q die Mittelkraft R nach ihrer Richtung AR, oder anstatt der Mittelkraft R die Seitenkräfte P, Q nach ihren Richtungen anbringen kann.

Findet man aus den Seitenkräften die Mittelkraft, so nennt man dieß die **Mittelkraft aus den Seitenkräften zusammensetzen**. Werden hingegen aus der Mittelkraft die Seitenkräfte gefunden, so heißt dieß die **Mittelkraft in die Seitenkräfte zerlegen**.

Der Winkel PAR, welchen die Richtung der Mittelkraft R mit der Richtung der Seitenkraft P einschließt, heißt ein **Richtungswinkel** der Mittelkraft, und der Winkel PAQ, welchen die Seitenkräfte mit einander machen, heißt der **Richtungswinkel der Seitenkräfte.**

Anmerkung. Wird nichts besonders erinnert, so wird jedesmal vorausgesetzt, daß die Richtungen der Kräfte in einerley Ebene liegen.

§. 15.

Lehrsatz. **Wirken zwey Seitenkräfte P, Q, deren Größe und Richtung durch die Linien AP, AQ [Fig. 2.] ausgedrückt werden, unter einem rechten Winkel PAQ auf den Punct A: so wird die Diagonale AR des Rectangels PAQR, welches sich aus den Linien AP, AQ beschreiben läßt, die Größe und Richtung der Mittelkraft R von den beyden Seitenkräften P, Q vorstellen.**

Beweis. Man denke sich jetzt die AR als eine aus dem Punct A zwischen den Richtungen AP, AQ beliebig gezogne Linie, welche also mit der Richtung der Seitenkraft P irgend einen Winkel PAR einschließt, und durch A auf AR die Normallinie qq' gezogen: so hat die Linie AP gegen den Linien AR und Aq, so wie die Linie AQ gegen Aq' und AR, eben die Lage wie AR gegen AP und AQ. Weil nun die Mittelkraft R mit den beyden Seitenkräften P, Q im Gleichgewicht seyn soll: so werden sich nun zwey Seitenkräfte p, q nach den Richtungen AR, Aq angeben lassen, welche eben so viel wirken als die Kraft P nach der Richtung AP. Und eben so kann man Q als eine Mittelkraft ansehen,

und solche in die Seitenkräfte p', q' nach den Richtungen AR, Aq' zerlegen. Nun hat die Mittelkraft R gegen ihre Seitenkräfte P, Q eben die Lage, wie die (mittlere) Kraft P gegen die Seitenkräfte p, q, und wie die (mittlere) Kraft Q gegen die Seitenkräfte q', p'; daher verhält sich für dem Gleichgewichtszustand dieser Kräfte nach §. 13. und dessen Zus. I.

$$R : P = P : p, \text{ also } p = \frac{P^2}{R}$$

$$R : Q = P : q, \quad " \quad q = \frac{P \cdot Q}{R}$$

$$R : Q = Q : p', \quad " \quad p' = \frac{Q^2}{R}$$

$$R : P = Q : q', \quad " \quad q' = \frac{P \cdot Q}{R}.$$

Wenn daher nach der Voraussetzung R mit P und Q im Gleichgewichte seyn soll, so können die Kräfte P, Q weggenommen und anstatt derselben die Kräfte p, q, p', q' angebracht werden, ohne das Gleichgewicht zu stören [§. 14.]. Es ist aber $q = q' = \frac{P \cdot Q}{R}$; daher heben diese gleichen und einander gerade entgegenwirkenden Kräfte einander auf [§. 12.], und es müssen noch die Kräfte p, p', welche nach AR wirken, der Kraft R, welche ihnen gerade entgegen nach RA wirkt, das Gleichgewicht halten und ihr gleich seyn [§. 12.]. Daher ist $R = p + p' = \frac{P^2}{R} + \frac{Q^2}{R} = \frac{P^2 + Q^2}{R}$, oder $R^2 = P^2 + Q^2$.

Da nun nach der Voraussetzung P = AP, Q = AQ und PAQ = 90° seyn soll, und daher $AP^2 + AQ^2 = PQ^2$ [Geom. §. 125.] ist: so ist $R^2 = PQ^2$, oder R = PQ. Im Rectangel PAQR, welches sich aus AP, AQ construiren lässt, sind aber die Diagonalen gleichgroß, nämlich PQ = AR

[Geom. §. 116.]; daher auch R = AR, und weil die Richtung der mittlern Kraft R von A ausgehen muß, so ist die Diagonale AR die Größe und Richtung der mittlern Kraft R [§. 13. Zus. II. und §. 14.] in Hinsicht der auf einander rechtwinklich wirkenden Seitenkräfte P, Q nach den Richtungen AP, AQ.

Zusatz. So wie sich demnach aus zwey auf einander rechtwinklich wirkenden Seitenkräften, deren Größen in Linien gegeben sind, die Größe und Richtung der Mittelkraft durch die Diagonale eines Rectangels darstellen lässt: so kann man umgekehrt jede Kraft in zwey auf einander rechtwinklich wirkende Seitenkräfte zerlegen, wenn man über die die Mittelkraft vorstellende Linie Rectangel beschreibt.

§. 16.

Lehrsatz. Wirken zwey Kräfte P, Q, deren Größe und Richtung durch die Linien AP, AQ [Fig. 3.] ausgedrückt werden, unter einem schiefen Winkel PAQ auf den Punct A: so wird die Diagonale AR des Parallelogramms APRQ, welches sich aus den Linien AP, AQ beschreiben lässt, die Größe und Richtung der Mittelkraft R von den beyden Seitenkräften P, Q vorstellen.

Beweis. Man halbire den Winkel PAQ, ziehe durch den Punct A die Linie FE normal auf die Theilungslinie AK. Jede der Kräfte AP, AQ zerlege man mittelst der Rectangel AFPH, AEQG in die rechtwinklichen Seitenkräfte AF und AH, so wie in AE und AG [§. 15. Zus.]: so wirken die Kräfte AF, AE einander gerade entgegen; und es wirkt daher nach der Richtung der größern Kraft hin auf den Punct A eine Kraft AF — AE (denn AF > AE,

nach Geom. §. 248., weil FAP = EAQ). Oder, wenn man FD = AE macht, so wirkt auf den Punct A nach AF eine Kraft AF — FD = AD [§. 12. Zus. I.]. Die Kräfte AH, AG aber wirken nach einerley Richtung, und wenn HK = AG gemacht wird, so ist die auf den Punct A nach der Richtung AK wirkende Kraft = AG + AH = AH + HK = AK [§. 12. Zus. II.]. Aus den beyden auf einander rechtwinklich wirkenden Seitenkräften AD, AK beschreibe man das Rectangel AKRD, so ist die Diagonale AR dieses Rectangels die Größe und Richtung der Mittelkraft in Hinsicht der beyden Seitenkräfte AD, AK [§. 15]. Zieht man nun aus dem Punct R nach P und Q die geraden Linien RP, RQ, so ist AQRP ein Parallelogramm. Denn da

$$\left.\begin{array}{rcl} AG = HK & = & LR \\ AE = GQ = FD & = & LP \\ AGQ & = & RLP = 90^\circ \end{array}\right\}$$ wie leicht aus der Construction zu ersehen ist [Geom. §. 115. Zus. III.],

so ist $\Delta AGQ \cong \Delta RLP$

folglich AQ = RP

und GAQ = LRP.

Aber auch KAR = DRA [Geom. §. 113.]

daher GAQ + KAR = LRP + DRA

d. i. QAR = PRA

Folglich $AQ \mathrel{\underline{\parallel}} RP$,

also auch $AP \mathrel{\underline{\parallel}} RQ$ [Geom. §. 115. Zus. I.]

Daher AQRP ein Parallelogramm [Geom. §. 84.], und AR die Diagonale desselben. Nun war AR die Größe und Richtung der Mittelkraft von den beyden Seitenkräften AD, AK, oder, was dasselbe

ist, von den vier Seitenkräften AF und AE, AH und AG. Weil ferner AF, AH wieder die Seitenkräfte von der AP, und AE, AG die Seitenkräfte von der AQ sind [§. 14.]: so ist AR = R, nämlich die Diagonale des Parallelogramms AQRP die Größe und Richtung der beyden Seitenkräfte AP, AQ oder P, Q.

Zusatz I. Wären die Seitenkräfte P, Q in Zahlen gegeben, z. B. P = 4 Pfund, Q = 3 Pfund, so trage man auf die Schenkel des gegebnen Richtungswinkels PAQ [Fig. 4.], nämlich auf AP = 4 Theile, auf AQ = 3 Theile mittelst eines verjüngten Maßstabes, und vollende das Parallelogramm PAQR: so gibt die Diagonale AR nach demselben Maßstabe die Größe der mittlern Kraft ebenfalls in Pfunden und Theilen desselben an.

Weil PR = AQ, und im △ RPA die Summe AP + PR > AR [Geom. §. 107.] oder AR < AP + AQ, so folgt, daß die mittlere Kraft stets kleiner als die Summe der Seitenkräfte ist, und zwar um desto kleiner, je größer der Richtungswinkel der Seitenkräfte wird.

Zusatz II. Durch Rechnung findet man die drey Größen, R, P, Q aus ihren Richtungswinkeln auf folgende Art. Man setze den Richtungswinkel der Kräfte

P und R oder PAR = α [Fig. 4.]
Q „ R „ QAR = β
P „ Q „ PAQ = δ, so ist $\alpha + \beta = \delta$.

Nun verhält sich, im △ APR, AP : AR = sin ARP : sin APR [Geom. §. 252.], d. i. $P : R = \sin\beta : \sin(180° - \delta) = \sin\beta : \sin\delta$ [Geom. §. 243. Zus. I.]. Ferner verhält sich AP : PR = sin ARP : sin PAR, d. i. $P : Q = \sin\beta : \sin\alpha$. Daher a) $R \cdot \sin\beta = P \cdot \sin\delta$, und b) $P \cdot \sin\alpha = Q \cdot \sin\beta$.

Hieraus erhält man

$$1)\ P = \frac{Q \cdot \sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{R \cdot \sin\beta}{\sin\delta}$$

$$2)\ Q = \frac{P \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{R \cdot \sin\alpha}{\sin\delta}$$

$$3)\ R = \frac{P \cdot \sin\delta}{\sin\beta} = \frac{Q \cdot \sin\delta}{\sin\alpha}.$$

Weil ferner $AD = AP \cdot \cos\alpha = P \cdot \cos\alpha$, und $RD = RP \cdot \cos\beta = Q \cdot \cos\beta$ [Geom. §. 249. für rad = 1], so ist auch $AD + RD = AR$, oder

$$4)\quad R = P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta.$$

Ferner ist nach b) $P \cdot \sin\alpha = Q \cdot \sin\beta$. Aber $\beta = \delta - \alpha$, und $\sin\beta = \sin(\delta - \alpha) = \sin\delta \cdot \cos\alpha - \cos\delta \cdot \sin\alpha$. Daher $P \cdot \sin\alpha = Q \cdot \sin\delta \cdot \cos\alpha - Q \cdot \cos\delta \cdot \sin\alpha$, oder $Q \cdot \sin\delta = \frac{P \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{Q \cdot \cos\delta \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha} = P \cdot \tan\alpha + Q \cdot \cos\delta \cdot \tan\alpha$ $= (P + Q \cdot \cos\delta) \tan\alpha$. Folglich

$$5)\quad \tan\alpha = \frac{Q \sin\delta}{P + Q \cdot \cos\delta};\quad \tan\beta = \frac{P \cdot \sin\delta}{Q + P \cdot \cos\delta}$$

Ferner ist

6) $R = \sqrt{(P^2 \pm 2\,P \cdot Q \cdot \cos\delta + Q^2)}$ [Geom. §. 256. Zus. für r = 1], wo das negative Zeichen gilt, wenn $\delta > 90°$ ist. Endlich ist

7) $\cos\delta = \frac{R^2 - (P^2 + Q^2)}{2\,P \cdot Q}$, wo, wenn $P^2 + Q^2 > R^2$, $\delta > 90°$ ist.

§. 17.

Aufgabe. **Drey oder mehrere Kräfte, deren Richtungen in einem Punct A [Fig. 5.] zusammenkommen, durch Zeichnung in eine Kraft zu vereinigen, und eben so umgekehrt, eine Kraft in zwey oder mehrere Seitenkräfte zu zerlegen.**

Auflösung. 1) Man soll die drey Kräfte P, P', P'', deren Größe und Richtung die Linien AP, AP', AP'' vorstellen, in eine Kraft vereinigen.

Aus PAP' vollende man das Parallelogramm PAP'R': so sind AP, AP' in AR' vereinigt [§. 16.]. Aus R'AP'' vollende man das Parallelogramm R'AP''R: so sind AR', AP'', d. i. AP, AP', AP'' in AR vereinigt.

Eben so verfahre man weiter, wenn noch mehrere Kräfte durch A, nach ihren Richtungen und Verhältnissen gegeben sind.

2) Man soll die Kraft AR in zwey oder drey Kräfte zerlegen.

Um AR, als eine Diagonale, beschreibe man ein beliebiges Parallelogramm AP''RR': so ist AR in AP'', AR' zerlegt. Um AR' z. B. beschreibe man ein zweytes Parallelogramm PAP'R': so ist AR' in AP, AP', folglich AR in die Seitenkräfte AP, AP', AP'' zerlegt.

Eben so verfahre man weiter, wenn noch mehrere Seitenkräfte verlangt werden, indem man nämlich eine der gefundnen Seitenkräfte immer wieder als die Diagonale eines Parallelogramms betrachtet.

Zusatz I. Hieraus ersieht man zugleich, daß die Kräfte AP, AP', AP'' u. s. w. auch in verschiednen Ebenen liegen können, wenn sie nur in einem Punct zusammentreffen. Jedoch sind jede zwey Kräfte und ihre mittlere Kraft allemal in einer Ebene [§. 14.] anzunehmen.

Zusatz II. Verlängert man RA in Fig. 3. und Fig. 5. über A hinaus: so hält in dieser Richtung eine Kraft Aℜ = AR, oder ℜ = R, den Kräften AP, AQ, oder den Kräften AP, AP', AP'' zusammen, das Gleichgewicht [§. 14.].

Zweytes Kapitel.

Vom Hebel.

§. 18.

Erklärung. Jede feste und unbiegsame Linie, an welcher drey Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen wirkend im Gleichgewicht sind, heißt ein Hebel. Wird derselbe ohne Gewicht voraus-

gesetzt, so wird er, zur Unterscheidung vom physischen Hebel, ein mathematischer genannt.

Derjenige Punct des Hebels, in welchem eine von den drey Kräften so angebracht ist, daß dieser Punct nicht weichen kann, sondern der Hebel sich wie um einen festen unbeweglichen Punct drehen lässt, heißt der **Dreh-, Stütz- oder Ruhepunct.** Diejenigen Puncte aber, auf welche die übrigen beyden Kräfte nun wirken, nennt man **Angriffs- oder Aufhängepuncte, auch Puncte der Kraft und Last.**

Liegen der Dreh- oder Stützpunct C und die beyden Aufhängepuncte A, B in einer geraden Linie [Fig. 6. 7. 8.], so heißt der Hebel ein **geradliniger**; und zwar wieder ein **doppelarmiger**, wenn der Stützpunct C [Fig. 6. 8.] zwischen den beyden Aufhängepuncten A, B liegt; hingegen ein **einarmiger**, wenn der Stützpunct C [Fig. 7.] in der durch die Aufhängepuncte A, B verlängerten Linie liegt. Die aus dem Stützpuncte C nach den Aufhängepuncten A, B gezognen Linien nennt man die **Hebelarme.**

Bilden der Stützpunct C [Fig. 9.] und die beyden Aufhängepuncte A, B einen Triangel, oder die beyden Hebelarme CA, CB einen Winkel, dessen Scheitel in den Dreh- oder Stützpunct C fällt: so wird dieser Hebel ein **Winkelhebel** genannt.

Die winkelrechten Linien CD, CE [Fig. 8. 9.] vom Drehpuncte C auf die Richtungen AP, BQ der Kräfte P, Q, oder auf ihre Verlängerungen, nennt man die Abstände der Richtungen von dem Drehpuncte; und die Producte der Abstände mit den zugehörigen Kräften heißen die sta-

tischen Momente der Kräfte in Bezug auf den Drehpunct.

Anmerkung. Bey den folgenden Untersuchungen wird allemal ein gewichtloser Hebel vorausgesetzt, und dabey angenommen, daß sich die Richtungen sämmtlicher Kräfte in einerley Ebene befinden.

§. 19.

Lehrsatz. Am waagerechten doppelarmigen Hebel AB [Fig. 6.], welcher in C seinen Drehungspunct hat, sind die Gewichte P und Q aufgehängt. Verhalten sich nun diese frey hängenden Gewichte umgekehrt wie die Längen der Hebelarme, an welchen sie angebracht sind, so ist der Hebel im Gleichgewicht.

Beweis. Ueber AB beschreibe man den Halbkreis ADB, ziehe aus dem Drehungspuncte C die Linie CR auf AB normal, und durch D und A, so wie durch D und B die Linien DG, DJ. Man nehme auf den Richtungen der Kräfte nach dem Verhältniß der Kräfte P und Q, nämlich für P = AE, Q = BF, AE : BF = P : Q, und beschreibe die Rectangel [§. 10.] EGHA, FJKB: so sind die rechtwinklichen Triangel AEG, ACD, BCD, BFJ einander ähnlich [Geom. §. 159.]. Nun verhält sich nach den Bedingungen der Aufgabe P : Q oder AE : BF = BC : AC, und wegen Aehnlichkeit der angegebenen Triangel, auch weil AH = EG, und BK = FJ ist,

AH : AE = AC : CD
und BF : BK = CD : CB,
aber auch AE : BF = CB : AC,
folglich AH : BK = 1 : 1 [Geom. §. 59. Zus. I.].
also ist AH = BK.

Außer den Kräften AE und BF [§. 13. Zus. III.] bringe man in der Verlängerung des Hebels in A die Kraft AH, und in B die der Kraft AH gleiche Kraft BK an [§. 13. Zus. III.]: so entspringt aus den beyden Kräften in A die Mittelkraft AG [§. 15.], und aus den beyden Kräften in B die Mittelkraft BJ. Man nehme in der Verlängerung GD die DL = AG, und in der Verlängerung von JD die DM = BJ, ziehe MN parallel mit DL, und von N nach L die NL, so wie auf CR die Normalen MO, LS: so ist wegen Congruenz der rechtwinklichen Triangel DOM, BFJ, und der rechtwinklich congruenten Triangel AEG, DSL, NOM [Geom. §. 105.], die DMNL ein Rectangel [Geom. §. 115. Zus. I. V.], dessen Diagonale DN, als die Verlängerung von CD, man als eine mittlere Kraft ansehen kann, welche mit den Kräften AG und BJ, also auch mit den Kräften AE, AH, BF, BK im Gleichgewicht ist. Denkt man sich die Kraft DN im Puncte C angebracht, so muß das Gleichgewicht unter den fünf Kräften DN, AE, AH, BF, BK, welche am Hebel AB wirken, noch bestehen [§. 11.], und der Hebel muß auch ohne Unterstützung in Ruhe bleiben. Aber AH = BK; daher kann man nach §. 12. Zus. III. diese Kräfte wegnehmen, und das Gleichgewicht unter den drey Kräften AE, BF und DN bleibt ungestört. Wird endlich anstatt der Kraft DN der Punct C befestiget oder sonst gegen das Herabsinken unterstützt, so kann man auch die Kraft DN wegnehmen, ohne das Gleichgewicht unter den Kräften AE = P und BF = Q zu stören. Es sind daher die beyden Kräfte AE = P, BF = Q am Hebel AB im Gleichgewicht, wenn sich P : Q = CB : CA verhält.

Umgekehrt låſſt ſich auf eine åhnliche Art beweiſen, wenn ſich die Kråfte P, Q im Gleichgewichte befinden, daß ſich alsdann die Hebelarme, an welchen ſie angebracht ſind, umgekehrt wie dieſe Kråfte verhalten můſſen.

Zuſatz I. Weil die Kraft DN zur Erhaltung des Gleichgewichts eben die Wirkung hervorbringt, als wenn man den Punct C des Hebels unterſtůtzt: ſo leidet der Punct C nach der auf AB ſenkrechten Richtung CN einen Druck = DN. Da nun in den congruenten Triangeln AEG, NOM die AE = NO, und in den congruenten Triangeln BFJ, DOM die BF = DO: ſo iſt DN = NO + OD = AE + BF = P + Q. Setzt man nun die Kraft DN = R, ſo findet man den **Druck, welchen der Drehpunct C nach einer den Richtungen der Kråfte P und Q parallelen Richtung leidet,** oder

$$1)\quad R = P + Q.$$

Man ſetze AC = a, BC = b, ſo verhålt ſich P : Q = b : a; daher iſt

$$2)\quad aP = bQ \text{ [Geom. §. 53.]},$$

d. h. (weil hier nach der Vorausſetzung die Hebelarme CA, CB zugleich die Abſtånde [§. 18.] von den Richtungen der Kråfte ſind) **der gerade doppelarmige Hebel iſt im Gleichgewicht, wenn die ſtatiſchen Momente der Gewichte einander gleich ſind.**

Sind daher die Hebelarme oder Abſtånde a, b nebſt einem Gewichte gegeben: ſo kann man daraus das andere Gewicht finden. Denn

$$3)\quad P = \frac{b}{a} \cdot Q, \text{ oder } Q = \frac{a}{b} \cdot P.$$

Wåren hingegen die beyden Gewichte nebſt einem Hebelarm oder Abſtand gegeben: ſo findet man den zweyten Hebelarm oder Abſtand

$$4)\quad a = \frac{Q}{P} \cdot b, \text{ oder } b = \frac{P}{Q} \cdot a.$$

Nimmt man die Unterſtůtzung in C weg, und bringt dafůr die Kraft R nach einer auf AB ſenkrechten Richtung CR an: ſo ſind die drey Kråfte P, Q und R am Hebel AB im Gleichgewicht. Die Kraft Q verhindert, daß der Punct B nicht ausweicht. Wird daher B ſo befeſtigt, daß ſich der Hebel um B frey drehen kann: ſo wird Q entbehrlich, man kann dieſes Ge-

wicht wegnehmen, und die beyden Kräfte P, R am einarmigen Hebel sind im Gleichgewicht. Es verhielt sich aber

$$P : Q = CB : CA,$$

daher auch $P : P + Q = CB : CB + CA$ [Geom. §. 58. Zus. I.]

d. i. $P : R = CB : AB$, folglich

$$5)\quad AB \cdot P = CB \cdot R.$$

Es sind daher auch **am einarmigen Hebel zwey Kräfte P, R im Gleichgewicht, wenn ihre Momente rücksichtlich des Drehpunctes B einander gleich sind.**

Der Druck auf den Drehpunct B ist nach 1)

$$6)\quad Q = R - P.$$

Beyspiel I. An einem waagerechten doppelarmigen Hebel ist vom Drehpuncte in 18 Zoll Entfernung ein Gewicht von 30 Pfund senkrecht wirkend angebracht; wie groß wird ein Gewicht am andern Hebelarm in einer Entfernung von 3 Zoll vom Drehpuncte angebracht seyn müssen, wenn beyde Gewichte im Gleichgewicht seyn sollen?

Nach 3) findet man, wenn Q das gesuchte Gewicht ist, $Q = \frac{a}{b} \cdot P = \frac{18}{3} \cdot 30 = 180$ Pfund. Daher der Druck auf den Drehpunct nach 1), nämlich $R = P + Q = 30 + 180 = 210$ Pfund.

Beyspiel II. An einem waagerechten doppelarmigen Hebel sollen die Gewichte $P = 30$ Pfund, $Q = 120$ Pfund senkrecht-wirkend angebracht werden, wenn der Hebelarm, woran P hängt, 18 Zoll lang ist; wie groß wird der andere Hebelarm zum Aufhängen des Gewichtes Q seyn müssen?

Nach 4) findet man, wenn b die gesuchte Länge bezeichnet, $b = \frac{P}{Q} \cdot a = \frac{30}{120} \cdot 18 = 4{,}5$ Zoll.

Zusatz II. Wären die Kräfte P, Q an A, B [Fig. 10.] unmittelbar am Hebel angebracht, und es drehete sich dieser um C, so daß er aus der Lage AB in die Lage ab käme: so hätte A den Bogen Aa, und B den Bogen Bb in derselben Zeit zurückgelegt, und es wäre $Aa : Bb = CA : CB$. Aber auch $Q : P = CA : CB$. Daher $Q : P = Aa : Bb$, und **es verhalten sich demnach die Kräfte am Hebel im Zustande des Gleichgewichts, wie ihre in gleicher Zeit zurückgelegten Wege umgekehrt.**

Zusatz III. Den Weg, welchen eine Kraft in einer Zeitsecunde zurücklegt, nennt man die Geschwindigkeit dieser Kraft [§. 89. Zus. 1.]. Sind demnach die im vorigen Zus. II. zurückgelegten Wege Aa, Bb die Geschwindigkeiten C, c der Kräfte P, Q: so ist im Gleichgewichtszustand $P : Q = c : C$, und daher $P \cdot C = Q \cdot c$. Diese Producte nennt man die mechanischen Momente der Kräfte, welche also für den Gleichgewichtszustand einander gleich sind.

Zusatz IV. Sind wie in Fig. 11. an dem einen Hebelarm AC ein Gewicht P, an dem andern aber zwey Gewichte P', P'', oder wie in Fig. 12. an dem einen Hebelarm AC zwey Gewichte P, P', an dem andern drey Gewichte P'', P''', P'''' angehängt: so muß für den Gleichgewichtszustand im ersten Falle $AC \cdot P = CD \cdot P' + CB \cdot P''$, und im zweyten Falle $CA \cdot P + CB \cdot P' = CD \cdot P'' + CE \cdot P''' + CF \cdot P''''$ seyn. Und eben so für noch mehrere Gewichte an beyden Hebelarmen.

§. 20.

Aufgabe. Zwey Gewichte P und Q am Hebel sind nebst ihrem Abstande gegeben; man soll den Stützpunct für das Gleichgewicht finden.

Auflösung. Erster Fall. Ziehen beyde Gewichte nach einerley Seite, wie am doppelarmigen Hebel in Fig. 6.: so fällt der Ort der Unterstützung C zwischen beyde Gewichte. Setzt man den Abstand beyder Gewichte $AB = l$, $AC = x$, so ist $CB = l - x$, also für das Gleichgewicht $AC \cdot P = BC \cdot Q$ [§. 19. Zus. I. 2)], d. i. $x \cdot P = (l - x) Q = lQ - xQ$, also $xP + xQ = x [P + Q] = l \cdot Q$. Folglich $x = \frac{l \cdot Q}{P + Q} = AC$. Eben so folgt für $BC = y = \frac{l \cdot P}{P + Q}$.

Beyspiel. Es sey in Fig. 6. P = 2 Pfund, Q = 6 Pfund, und AB = l = 12 Zoll, so ist

$AC = x = \frac{l \cdot Q}{P + Q} = \frac{12 \cdot 6}{2 + 6} = \frac{72}{8} = 9$ Zoll, oder
$BC = y = \frac{l \cdot P}{P + Q} = \frac{12 \cdot 2}{2 + 6} = \frac{24}{8} = 3$ Zoll.

Zweyter Fall. Ziehen die Gewichte nach entgegengesetzten Seiten, wie am einarmigen Hebel in Fig. 7.: so fällt der Stützpunct C beyden Gewichten zur Seite. Setzt man auch hier den Abstand der Gewichte $AB = l$, und $CB = x$: so ist $CA = l + x$, also für das Gleichgewicht $Q \cdot CB = P \cdot CA$ [§. 19. Zus. I. 5)], d. i. $Q \cdot x = P \cdot (l + x) = P \cdot l + Px$, also $Qx - Px = [Q - P]\,x = P \cdot l$, und $x = \frac{l \cdot P}{Q - P} = CB$. Setzt man $AC = y$, so erhält man auf eben diese Weise $AC = y = \frac{l \cdot Q}{Q - P}$.

Beyspiel. Es sey in Fig. 7. $P = 2$ Pfund, $Q = 6$ Pfund, und $AB = l = 12$ Zoll, so ist $CB = x = \frac{l \cdot P}{Q - P} = \frac{12 \cdot 2}{6 - 2} = \frac{24}{4} = 6$ Zoll; und $AC = y = \frac{l \cdot Q}{Q - P} = \frac{12 \cdot 6}{6 - 2} = \frac{72}{4} = 18$ Zoll.

§. 21.

Aufgabe. Es sind drey Gewichte P, P', P'' nebst ihren Entfernungen gegeben; man soll den Stützpunct C [Fig. 11.] für das Gleichgewicht finden.

Auflösung. Es sey $AD = a$, $AB = b$ und $AC = x$: so ist $CD = a - x$, $CB = b - x$, und daher für dem Gleichgewichtszustand $P \cdot CA = P' \cdot CD + P'' \cdot CB$ [§. 19. Zus. IV.], d. i. $P \cdot x = P' \cdot (a - x) + P'' \cdot (b - x) = P'a - P'x + P''b - P''x$, und $Px + P'x + P''x = (P + P' + P'')\,x = aP' + bP''$. Daher $AC = x = \frac{aP' + bP''}{P + P' + P''}$.

Zusatz I. Wären mehrere Gewichte P, P', P'', P''', P'''' rc. [Fig. 12.] und deren Entfernungen AB = a, AD = b, AE = c, AF = d gegeben, so wäre für den Stützpunct C im Stande des Gleichgewichts

$$CA \cdot P + CB \cdot P' = CD \cdot P'' + CE \cdot P''' + CF \cdot P''''.$$

Ist nun CA = x, so ist CB = x — a, CD = b — x, CE = c — x, CF = d — x.

also $xP + (x - a)P' = (b - x)P'' + (c - x)P''' + (d - x)P''''$
oder $Px + P'x - P'a = P''b - P''x + P'''c - P'''x + P''''d - P''''x$
oder $Px + P'x + P''x + P'''x + P''''x = P'a + P''b + P'''c + P''''d$
oder $(P + P' + P'' + P''' + P'''')\,x = P'a + P''b + P'''c + P''''d$

$$\text{Folglich } CA = x = \frac{P'a + P''b + P'''c + P''''d}{P + P' + P'' + P''' + P''''}$$

Beyspiel. Es sey in Fig. 12. P = 4 Pfund, P' = 8 Pfund, P'' = 5 Pfund, P''' = 3 Pfund, P'''' = 2 Pfund, und AB = 4', AD = 7', AE = 11', AF = 16': so ist CA = $\frac{4 \cdot 8 + 7 \cdot 5 + 11 \cdot 3 + 16 \cdot 2}{4 + 8 + 5 + 3 + 2} = \frac{132}{22} = 6$ Fuß.

Zusatz II. Würde man also in Fig. 11. in C oder in der Entfernung AC eine Kraft = P + P' + P'' den herab hängenden Gewichten, oder in Fig. 12. in der Entfernung AC eine Kraft = P + P' + P'' + P''' + P''' den herab hängenden Gewichten entgegen wirken lassen: so würden diese Hebel auch ohne Unterstützung im Gleichgewicht bleiben.

Der Punct, welcher, wenn mehrere Gewichte an einer oder mehrern festen mit einander verbundnen Linien oder Ebenen angebracht sind, gehörig unterstützt werden muß, damit diese Gewichte in allen Lagen der Linien oder Ebenen in Ruhe bleiben, heißt der Schwerpunct. In eben der Bedeutung versteht man unter dem Schwerpunct eines schweren Körpers denjenigen Punct, welcher vertical unterstützt werden muß, wenn der Körper in allen Lagen in Ruhe bleiben soll.

Bey dem geraden Hebel ist der Dreh- oder Ruhepunct zugleich der Schwerpunct.

Anmerkung I. Ueber die Aufgabe, den Schwerpunct der Linien, Flächen und Körper zu finden, ist Folgendes zu bemerken:

1) bey einigen dieser Dinge liegt der Schwerpunct in dem Mittelpunct ihrer Größe, z. E. bey der geraden Linie, der Kreislinie, dem Parallelogramm, der Kreisfläche und den regulären Vielseiten im Mittelpunct, desgleichen bey

der Kugel; bey allen prismatischen Körpern, z. B. dem Parallelepiped, Cylinder rc. in der Mitte der Axe.

2) Bey allen Arten der Flächen und Körper findet man den Schwerpunct am genauesten durch Rechnung der höhern Analysis. Z. E.

a) beym Triangel liegt der Schwerpunct von der Grundlinie aus im dritten Theil der Theilungslinie, welche man aus dem der Grundlinie gegenüber stehenden Winkel nach dem Mittelpunct der Grundlinie gezogen hat.

Durch Zeichnung findet man den Schwerpunct eines Triangels, wenn man zwey Seiten halbirt, und aus den gegenüber stehenden Winkeln Linien zieht; dann ist der Durchschnittspunct dieser Linien der Schwerpunct des Triangels, was sich leicht erweisen lässt.

Mittelst dieses Satzes lässt sich der Schwerpunct irregulärer Vielseite bestimmen, wenn man sie durch Diagonalen in Triangel zerlegt, und die Inhalte der Triangel als proportionale Gewichte in Rechnung bringt.

In einer fünfseitigen Figur findet man den Schwerpunct durch Zeichnung, wenn man die Schwerpuncte der durch die Diagonalen erhaltnen drey Triangel bestimmt, diese drey Schwerpuncte durch gerade Linien verbindet, und für diesen Triangel den Schwerpunct sucht; dieser ist dann der Schwerpunct des Fünfseits.

b) Nennt man bey einem Trapez die Länge der größern Parallele $= B$, die Länge der kleinern $= b$, und die Länge der Linie aus den Mittelpuncten der Parallelen $= a$: so ist die Entfernung des Schwerpunctes von der größern Parallele B, auf der Linie a gemessen, $= \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{B + 2b}{B + b}$.

c) Bey einer ganzen Parabelfläche TAR [§. 101. Tab. V. Fig. 65.] ist der Abstand des Schwerpunctes vom Scheitel $A = \frac{3}{5}$ der Abscisse AH, und in der halben Parabelfläche AHR liegt der Schwerpunct in einer mit der Axe AU parallelen Linie, welche in $\frac{3}{8} \cdot HR$, von der Absciße AH angerechnet, gezogen wird.

d) Der Schwerpunct eines Halbkreises liegt $= \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$ oder sehr nahe $\frac{14}{33}$ des Halbmessers vom Mittelpunct.

e) Den Abstand des Schwerpunctes eines Kreisabschnittes vom Mittelpuncte des zugehörigen Kreises findet man, wenn mit dem zwölffachen Inhalte des Abschnittes in den Würfel der größten Sehne dividirt wird.

f) Der Schwerpunct einer Pyramide oder eines Kegels ist um $\frac{1}{4}$ der Höhe oder Axe von der Grundfläche entfernt.

g) Die Entfernung des Schwerpunctes der Halbkugel beträgt vom Mittelpuncte $\frac{3}{8}$ des Halbmessers.

3) Bey allen regulären und irregulären Körpern lässt sich der Schwerpunct auf mancherley Art durch Versuche finden, und wozu z. E. folgende Methode sehr bequem ist: Man hänge den Körper in zwey verschiednen Stellen seiner Oberfläche mittelst eines Fadens frey auf, bis er beydemal in Ruhe kommt, da dann der Schwerpunct in der Verlängerung des Fadens, folglich an dem Orte liegt, wo beyde verlängerte Faden einander schneiden.

Anmerkung II. Den Schwerpunct einer von einer krummen Linie begrenzten Fläche AA'G'G [Fig. 13.] findet man mittelst folgenden Ausdrucks: Theilt man nämlich die auf AA' winkelrechte Linie AG in eine beliebige gerade Anzahl gleicher Theile AB, BC, CD ꝛc., zieht aus den Theilpuncten die Linien BB', CC', DD' ꝛc. mit AA' parallel, nennt jeden der gleichen Theile AB, BC, CD ꝛc. $= \alpha$, und die rechtwinklichen Ordinaten AA' = a, BB' = b, CC' = c ꝛc. so ist die Entfernung des Schwerpunctes der ganzen Fläche von der Linie AA' =

$$\alpha \cdot \frac{0 \cdot 1a + 1 \cdot 4b + 2 \cdot 2c + 3 \cdot 4d + 4 \cdot 2e + 5 \cdot 4f + 6 \cdot 1g}{1a + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + 1g}$$

Eben so kann man die Entfernung des Schwerpunctes von der Linie AG finden, nur muß man dann AA' in eine gerade Anzahl gleicher Theile theilen, und durch die Theilpuncte mit AG bis an die Curve Parallelen ziehn. Wird eine der Ordinaten = 0, so bleibt die Rechnung ungeändert, nur daß man für dem Werth der Ordinate = 0 setzt.

Anmerkung III. Der Inhalt dieser Fläche ist $= \frac{1}{3} \cdot \alpha (a + 4b + 2c + 4d + 2e + 4f + g) = F$.

Nennt man die Entfernung des Schwerpunctes dieser Fläche von einer der Anfangsordinaten z. B. AA' = e, und denkt sich, daß durch die Umdrehung dieser Fläche um die Axe AA' ein Körper entsteht: so ist der Inhalt dieses Körpers $= Q = 2e\pi \cdot F$, wo $\pi = 3{,}141$.

Beyspiel. Bey einem Wasserkessel [Fig. 14.] sey AH = AB = 1,062 Fuß, ferner GF = FD = 1 Fuß, FE = 0,333 Fuß, und AK = KL ꝛc. $= \alpha = \frac{AB}{6} = \frac{1{,}062}{6} = 0{,}177$ Fuß; ferner sey AE = a = 1,46, KM = b = 1,42, c = 1,4, d = 1,36, e = 1,3, f = 1,16 Fuß und g = 0: so ist der Abstand des Schwerpunctes der Fläche ABDE von der ersten Ordinate oder der Drehungsaxe AE = e $= 0{,}177 \cdot (0 \cdot 1 \cdot 1{,}46 + 1 \cdot 4 \cdot 1{,}42 + 2 \cdot 2 \cdot 1{,}4 + 3 \cdot 4 \cdot 1{,}36 + 4 \cdot 2 \cdot 1{,}3 + 5 \cdot 4 \cdot 1{,}16 + 6 \cdot 1 \cdot 0) : (1 \cdot 1{,}46 + 4 \cdot 1{,}42 + 2 \cdot 1{,}4 + 4 \cdot 1{,}36 + 2 \cdot 1{,}3 + 4 \cdot 1{,}16 + 1 \cdot 0 = 0{,}177 \cdot (0 + 5{,}68 + 5{,}6 + 16{,}32 + 10{,}4 + 23{,}2 + 0) : (1{,}46 + 5{,}68 + 2{,}8 + 5{,}44 + 2{,}6 + 4{,}64 + 0) = \frac{0{,}177 \cdot 61{,}2}{22{,}62} = 0{,}47$ Fuß.

Der Flächeninhalt von AEDB $= F = \frac{1}{3} \cdot 0{,}177 \cdot (1{,}46 + 4 \cdot 1{,}42 + 2 \cdot 1{,}4 + 4 \cdot 1{,}36 + 2 \cdot 1{,}3 + 4 \cdot 1{,}16 + 0) = \frac{0{,}177 \cdot 22{,}62}{3} = \frac{4{,}00374}{3} = 1{,}34$ Quadratfuß.

Demnach der körperliche Inhalt des Wasserkessels $= Q = 2 e \pi \cdot F = 2 \cdot 0{,}47 \cdot 3{,}141 \cdot 1{,}34 = 3{,}953$ Cubikfuß, oder beynahe 4 Cubikfuß.

Anmerkung IV. Auch der Inhalt andrer Körper, welche durch Umdrehung ebener Flächen um eine ihrer Seiten, als einer Axe, entstehen, läßt sich mittelst des Schwerpunctes finden. So ist z. B. der Flächeninhalt eines Halbkreises $= F = \frac{r^2\pi}{2}$, die Entfernung des Schwerpunctes der halben Kreisfläche vom Durchmesser nach Anmerkung I. 2) $d = e = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$. Daher der körperliche Inhalt der Kugel $= Q = 2 e \pi \cdot F = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi} \cdot \pi \cdot \frac{r^2\pi}{2} = \frac{4}{3} \cdot r^3 \pi$ [Geom. §. 240.].

§. 22.

Erklärung. Da die Schwerkraft [§. 7.] jeden schweren Punct eines Körpers nach einer Verticallinie treibt [§. 10.], und man sich das Gewicht eines Körpers in seinem Schwerpunct vereinigt denken kann: so muß der Schwerpunct des Körpers auch vertical wirken. Die Verticallinie durch den Schwerpunct des Körpers heißt seine **Directionslinie.**

Zusatz. Alles, was den Schwerpunct des Körpers in der Directionslinie hält, oder ihm genugsam entgegen wirkt, verhindert den Fall des Körpers.

Anmerkung. Aus dem Vorigen folgt:

1) Wird ein Körper in seinem Schwerpunct aufgehangen, daß er sich frey um diesen Punct drehen kann: so bleibt er in jeder Lage unbeweglich, und zwar desto sichrer, je tiefer der Schwerpunct unter dem Aufhängepunct ist.

2) Ein Körper steht desto sichrer auf der unterstützenden Fläche, je größer dieselbe und je näher ihr der Schwerpunct ist. Daher steht ein vierseitig prismatischer Körper sichrer auf der breiten, als auf der schmalen Seitenfläche. Hierbey ist es nicht nöthig, daß die Grundfläche in allen ihren Puncten unterstützt sey, indem schon drey Puncte,

die nicht in gerader Linie liegen, hinreichen, und oft die größte Sicherheit geben.

§. 23.

Aufgabe. An einem materiellen oder physischen Hebel, dessen Schwere zugleich mit in Betracht kommt, die Momente der Gewichte zu bestimmen.

Auflösung. Die Länge des Hebels sey die gerade Linie AB [Fig. 15.], der Stützpunct in C, sein Gewicht G in seinem Schwerpunct D, auch zwey Gewichte P, Q in den Endpuncten: so erhält man einen immateriellen geradlinigen Hebel, wie §. 19. Zus. IV., so daß $P \cdot CA = G \cdot CD + Q \cdot CB$.

Oder denkt man sich in einer gewissen Entfernung CE beyde Gewichte $G + Q$ vereinigt, wo $(G+Q) \cdot CE = G \cdot CD + Q \cdot CB$ wäre: so ist $P \cdot CA = (G+Q) \cdot CE$.

Zusatz. Von den hier genannten Größen lässt sich jede aus den übrigen finden. Nämlich

1) $P = \frac{G \cdot CD + Q \cdot CB}{CA} = \frac{(G+Q) \cdot CE}{CA}$.

2) $Q = \frac{P \cdot CA - G \cdot CD}{CB} = \frac{P \cdot CA - G \cdot CE}{CE} = \frac{P\ CA}{CE} - G$.

3) $CA = \frac{G \cdot CD + Q \cdot CB}{P} = \frac{(G+Q) \cdot CE}{P} = \frac{AD\ G + AB \cdot Q}{P+Q+G}$ [§. 21.]

4) $CB = \frac{P \cdot CA - G \cdot CD}{Q}$.

Beyspiel. An einer prismatischen Stange, deren Länge AB = 6 Fuß, und Gewicht G = 18 Pfund beträgt, hängen zwey Gewichte P = 16 Pfund, Q = 8 Pfund: man sucht den Stützpunct.

In diesem Falle ist nach §. 21. Anmerkung I. 1) $AD = \frac{AB}{2} = 3$ Fuß, und daher nach vorigem Zusatz und 3) $CA = \frac{AD \cdot G + AB \cdot Q}{P+G+Q} = \frac{3 \cdot 18 + 6 \cdot 8}{16 + 18 + 8} = \frac{102}{42} = 2,4$ Fuß.

Wäre AB ein Kegel, dessen Spitze B wäre, so wäre nach §. 21. Anmerkung I. 2) f) $AD = \frac{AB}{4} = 1,5$ Fuß, und daher $CA = \frac{1,5 \cdot 18 + 6 \cdot 8}{16 + 18 + 8} = \frac{75}{42} = 1,78$ Fuß.

Anmerkung. Der physische Hebel erhält verschiedne Namen, je nachdem von den drey Puncten am Hebel [§. 18.] der eine zwischen den beyden angebracht ist; er heißt Druckhebel, wenn der Ruhepunct, Traghebel, wenn der Lastpunct, Wurfhebel, wenn der Kraftpunct zwischen den beyden andern enthalten ist.

Zu den vorzüglichsten Anwendungen des Hebels gehören der Hebebaum, das Brecheisen, die Kurbel, die Hebelade, die Wage.

§. 24.

Erklärung. Die Waage ist ein physischer Hebel, womit sich das Gewicht einer jeden Masse mittelst eines bekannten Gegenwichts finden lässt. An der gleicharmigen Waage muß das Gegengewicht dem Gewicht der abzuwägenden Masse allemal gleich seyn. An der ungleicharmigen Waage oder der Schnellwaage kann einerley Gewicht in verschiednen Entfernungen von der Unterstützung verschiednen Lasten das Gleichgewicht halten, da sich dann an der römischen das Gegengewicht am langen Arme, an der schwedischen oder dänischen aber der Stützpunct an dem Waagebalken verschieben lässt.

§. 25.

Aufgabe. Die allgemeinen Einrichtungen einer gleicharmigen Waage anzugeben.

Auflösung. 1) In der Mitte des Waagebalkens oder des physischen Hebels ist

a) die Zunge KL [Tab. II. Fig. 17.] rechtwinklich auf der geraden Linie AB, die durch des Balkens Schwerpunct G, und die Aufhängepuncte A und B, der gleich schweren Waagschalen geht;

b) ein cylindrischer, zur Verminderung des Reibens unten geschärfter Zapfen C, rechtwinklich auf den verticalen Durchschnitt durch G, welcher sich in den beyden Pfannen der Schere oder Zange, woran der Waagbalken hängt, frey drehen kann.

2) Die Unterstützung C in der verticalen Linie durch den Schwerpunct G ist in der Zeichnung etwas über demselben, daß dieser also (wenn nun auch AB durch C gelegt wird) nebst dem horizontalen Balken in Ruhe bleibt, so lange die Gewichte völlig gleich sind. Ist aber das Gewicht an der einen Seite B etwas größer: so rückt der Schwerpunct nach D, und der Balken kommt nicht eher in Ruhe, als bis CD vertical wird, folglich der Winkel DCG durchlaufen worden ist.

3) Dieser Winkel DCG bestimmt den Ausschlag der Waage, und ist bey einerley Gewichte an B, d. i. bey gleicher Größe der GD, desto kleiner, d. i. die Waage desto fauler, je höher C über G, und desto größer, d. i. die Waage desto schneller und empfindlicher, je näher C der G ist, bis C in oder gar unter G kommt, da dann die Waage zu empfindlich ist und ganz überschlägt.

4) Die Länge der Arme vermehrt die Empfindlichkeit der Waage, da sie dem Ueberschusse des einen Gewichts ein größeres Moment gibt. Die Zunge, die beym Ausschlage aus der verticalen Schere austritt, dient, diesen Ausschlag merklich zu machen, und zwar desto mehr, je länger sie ist.

Zusatz. Hieraus ergibt sich der Unterschied zwischen den feinen Waagen, als Goldwaage, Probirwaage, hydrostatische Waage, bey denen das kleinste Gewicht einen Ausschlag geben

muß, und den gröbern Waagen, dergleichen die Kramerwaage ist, bey denen es nicht auf Grane ankommt. Bey jenen sind Arme und Zunge fein und lang, und C nahe über G; bey diesen sind Arme und Zunge stärker und kürzer, und C weiter über G.

Anmerkung. Sind die Arme GA und GB nicht genau von gleicher Länge, wie sie doch seyn sollten: so heißt dieß eine falsche Waage. Denn hält das Gewicht P an A mit der Masse Q an B das Gleichgewicht: so ist $P:Q = GB:GA$. Ist nun $GB > GA$, so ist auch $P > Q$, d. i. die Masse Q wiegt nicht so schwer, als ihr Gegengewicht P anzeigt.

Will man auf der falschen Waage dennoch das wahre Gewicht der Masse Q finden: so lege man sie in die andere Waagschale, und bringe sie auch mit dem Gewichte p an B ins Gleichgewicht; da dann zuvor $P:Q = GB:GA$, jetzt $Q:p = GB:GA$, folglich $P:Q = Q:p$, und demnach $Q = \sqrt{(P \cdot p)}$ [Geom. §. 53. Zus. II.] ist.

Auch ohne diese Rechnung dient folgendes Verfahren unmittelbar: nachdem man die Masse Q mit dem Gewichte P ins Gleichgewicht gebracht hat, lege man bekannte Gewichte anstatt der Masse Q in die Waagschale, bis sie auch mit P das Gleichgewicht halten, so geben diese das wahre Gewicht von Q.

§. 26.

Aufgabe. Die allgemeinen Einrichtungen einer Schnellwaage anzugeben.

Auflösung. 1) Am längern Arme des Waagebalkens ACB [Fig. 18.] verschiebt man ein und dasselbe Gegenwicht D immer weiter vom Ruhepunct C, welches dadurch immer mehr Moment erhält, und immer größern Lasten in der Schale E das Gleichgewicht halten kann.

2) Ist der Waagebalken so eingerichtet, daß C sein und der daran hängenden Schale Schwerpunct ist, welches man das Aequiren nennt: so ist er als ein mathematischer Hebel anzusehen, und die Abtheilungen des langen Arms werden der Entfernung der Last am kurzen Arme gleich gemacht; daß

also die Last in E das Vielfache des Gegengewichts D beträgt, welches seine Entfernung angibt.

Sind aber die Arme nicht auf einander äquirt, aber Gewicht und Schwerpunct des Waagebalkens gegeben: so lässt sich die ungleiche Größe der Abtheilungen zwar aus der Theorie des physischen Hebels bestimmen, aber bequemer und besser durch Versuche finden.

3) Sind große Lasten mit einer Schnellwaage abzuwägen: so muß der Balken mit Zapfen, Haken, Ketten u. s. w. die gehörige Stärke haben; auch sind besondre Vorrichtungen nöthig, die Lasten aufzuhängen, und die Waage aufzuziehn.

Anmerkung. Die hier beschriebne Schnellwaage ist die sogenannte römische, eigentlich rommanische, von dem arabischen Wort Romman, ein Granatapfel, indem das Gegengewicht eine solche Gestalt hatte. An der sogenannten schwedischen oder dänischen lässt sich der Ruhepunct verschieben, indem das Gegengewicht D in B fest ist.

§. 27.

Aufgabe. Ein mit verschiednen Gewichten beschwerter Balken, dessen Länge AB [Tab. I. Fig. 16.] ist, sey in A und B unterstützt: man sucht den Druck, den jede dieser Unterlagen leidet.

Auflösung. Man vereinige die Summe aller Gewichte S in E [§. 21.]. Nun sey anstatt der Unterlage in A eine Kraft P mit S im Gleichgewichte: so ist $P = \frac{BE}{AB} \cdot S$ [§. 19. Zus. I. 3)] = dem Drucke der Unterlage in A. Auf eben die Art ist anstatt der Unterlage in B ein Gewicht $Q = \frac{AE}{AB} \cdot S$ = dem Drucke der Unterlage in B. Demnach ist $P : Q = BE : AE$, d. i. die Unterlagen oder Stüt-

zen tragen in dem Verhältniß BE : AE, oder in dem umgekehrten Verhältniß ihrer Entfernungen vom Puncte E.

Beyspiel. Auf einem 12 Fuß langen Balken AB, dessen Gewicht 40 Pfund beträgt, liege in einer Entfernung von A in 4 Fuß in E ein Gewicht S = 60 Pfund: so ist wegen des Gewichtes S der Druck auf die Unterlage in A, nämlich $P = \frac{BE}{AB} \cdot S = \frac{8}{12} \cdot 60 = 40$ Pfund, und der Druck in B oder $Q = \frac{AE}{AB} \cdot S = \frac{4}{12} \cdot 60 = 20$ Pfund. Weil aber auf beyde Unterlagen das Gewicht des Balkens zur Hälfte vertheilt ist: so ist der Druck $P = 40 + 20 = 60$ Pfund, und der Druck $Q = 20 + 20 = 40$ Pfund.

§. 28.

Grundsatz. Wenn die Richtungen zweyer gleichen Kräfte P, Q, die den Winkelhebel [§. 18.] ACB [Tab. II. Fig. 19.] auf entgegengesetzte Art zu drehen streben, auf den Armen AC, BC desselben winkelrecht wirken, und die Abstände der Kräfte [§. 18.], oder hier die Hebelarme AC, BC, gleich groß sind: so erhalten die Kräfte einander im Gleichgewicht. Und eben so umgekehrt.

§. 29.

Lehrsatz. Zwey entgegengesetzte Kräfte P, Q, am Winkelhebel sind im Gleichgewicht, wenn sie sich wie ihre Abstände umgekehrt verhalten.

Erster Fall. Die Richtungen der Kräfte AP, BQ [Fig. 20.] sind winkelrecht auf den Hebel-

armen AC, BC, welche daher zugleich der Kräfte Abstände sind.

Beweis. Man lege durch C die gerade Linie DCE, mache DC = AC, EC = BC, und lasse an D eine Kraft p = P, an E eine Kraft q = Q rechtwinklich den Kräften P, Q entgegenwirken. Da nun auf diese Weise nach vorigem §. p mit P, q mit Q im Gleichgewicht ist: so sind alle vier Kräfte unter sich im Gleichgewicht. Nun ist nach der Voraussetzung P : Q = CB : CA, also auch p:q = CE:CD. Daher p und q [§. 19.], und demnach auch P und Q im Gleichgewicht [§. 12. Zus. III.]

Zweyter Fall. Die Richtungen der Kräfte AP, BQ [Tab. I. Fig. 9] sind schief auf den Hebelarmen AC, BC; so sind die winkelrechten Linien CD, CE die Abstände der Kräfte [§. 18.].

Beweis. Mit dem Winkel ACB würde zugleich seine unbiegsame Ebene um C gedreht werden, wobey es ohne Veränderung der Wirkung verstattet ist, die Kräfte in jedem beliebigen Punct der Richtungen AP, BQ anzubringen [§. 11.]. Denkt man sich also die in A und B angebrachten Kräfte in D und E angebracht, und es verhält sich nach der Voraussetzung bey der schiefen Richtung der Kräfte P:Q = CE:CD, so sind nach vorigem ersten Falle P und Q im Gleichgewicht.

Zusatz. Aus dem Lehrsatz folgt, daß auch an jedem Winkelhebel zwey Kräfte P, Q im Gleichgewichte seyn können, wenn ihre statischen Momente [§. 18. 19. Zus. I.] einander gleich sind.

Auch verhalten sich am Winkelhebel wie §. 19. Zusatz II. im Zustande des Gleichgewichts die Kräfte umgekehrt wie ihre Wege, und im Sinn des §. 19. Zus. III. sind für den Gleichgewichtszustand auch hier die mechanischen Momente gleich.

Anmerkung I. Wirken also an einem geradlinigen Hebel AB [Tab. I. Fig. 8.] zwey Kräfte P, Q unter schiefen Winkeln, und diese Kräfte verhalten sich umgekehrt wie ihre Entfernungen CD, CE, nämlich $P : Q = CE : CD$: so sind die Kräfte im Gleichgewicht, und so auch umgekehrt. Der Beweis folgt aus §. 29. und §. 11. Nennt man den Winkel $CAP = \alpha$, $CBQ = \beta$, die Längen $CA = A$, $CB = B$: so ist $CD = A \cdot \sin \alpha$, $CE = B \cdot \sin \beta$ [Geom. §. 243. Zus. I. und §. 249.]. Daher auch $P : Q = B \cdot \sin \beta : A \cdot \sin \alpha$, oder $P \cdot \sin \alpha : Q \cdot \sin \beta = B : A$.

Anmerkung II. Zu den Winkelhebeln gehören alle Arten der Kunstkreuze, Schwingen 2c.

Drittes Kapitel.

Von der Reibung.

§. 30.

Erfahrung. Ein Körper wird auf einer horizontalen Ebene leichter bewegt, wenn die Ebene und die Oberfläche des Körpers glatt, als wenn sie rauh oder uneben sind.

Zusatz. Die horizontale Ebene trägt das ganze Gewicht des Körpers, der also der kleinsten Kraft, die ihn in horizontaler Richtung zieht, folgen sollte. Wenn also oft eine beträchtliche Gewalt dazu erfordert wird, den Körper von der Stelle wegzubringen: so muß dieß von den Rauhigkeiten der Flächen herrühren; indem die Erhöhungen der einen in die Vertiefungen der andern eingreifen, und beyde durch das größere Gewicht des Körpers auch stärker in einander gedrückt werden.

§. 31.

Erklärung. Das Hinderniß, welches durch die Rauhigkeit der Oberflächen der Körper erzeugt wird, und welches sich der Bewegung entgegensetzt, heißt die Reibung oder Friction.

Zusatz I. Auf der waagrechten Fläche AB [Tab. II. Fig. 21.] befinde sich ein Körper ACDB, dessen Gewicht P von der Fläche getragen wird. In E sey mit AB parallel nach der Richtung EH eine Kraft F angebracht, oder an einem sehr biegsamen Faden EHF, welcher über eine Rolle H geht, hänge ein Gewicht F: so wird die Reibung der berührenden Flächen bey AB die Bewegung des Körpers so lange aufhalten, bis das Gewicht F hinlänglich vermehrt worden ist, um den Reibungswiderstand zu überwinden. Ist nun das Gewicht von der Beschaffenheit, daß der geringste Ueberschuß an Kraft den Körper AD in Bewegung setzen kann, so ist F mit der Reibung im Gleichgewicht, und die **Größe der Reibung** wird durch das Gewicht F angegeben; daher man auch das Gewicht F die Größe der Reibung nennt.

Zusatz II. Der Erfahrung gemäß ist die Größe der Reibung verschieden, wenn es darauf ankommt, den Körper entweder erst in Bewegung zu setzen, oder nach einerley Richtung in Bewegung zu erhalten, welches auch schon daraus geschlossen werden kann, daß bey der Bewegung die Hervorragungen der Flächen nicht so sehr in die Vertiefungen eindringen können, wie dieß nach vorhergegangner Ruhe der Fall ist. Man unterscheidet daher die Reibung für die anfängliche Bewegung oder die **Reibung der Ruhe** von der **Reibung während der Bewegung**.

So wie ein Körper auf einem zweyten vom Anfange oder auch während der Bewegung immer in gerader Richtung fortgeschoben werden kann: so ist es auch möglich, ihn an irgend einer Stelle um eine Achse sich drehen zu lassen; die dabey sich erzeugende Reibung heißt die **drehende**, so wie erstere die **schiebende**. Die drehende kommt bey allen Zapfen, welche mit ihren Grundflächen in Pfannen laufen, wie z. B. beym untern Zapfen einer Göpelwelle, dem Mühleisen ꝛc. vor. Beyde Reibungen, die schiebende und drehende können unter dem Namen der **gleitenden Reibung** begriffen werden, von welcher die **rollende** oder **wälzende** Reibung verschieden ist, bey welcher ein Cylinder, eine Kugel ꝛc. über eine Fläche gerollt oder gewälzt wird. Es läßt sich leicht einsehen, daß die wälzende Reibung weit kleiner als die gleitende ist.

Durch die Politur und dadurch, daß man die reibenden Flächen mit einer schicklichen Materie bestrichen oder schmiert,

kann die Rauheit derselben ansehnlich vermindert, also die Reibung bedeutend verkleinert werden; nur ist es nicht möglich, die Reibung hierdurch ganz aufzuheben.

Zusatz III. Den Erfahrungen gemäß kann man nachstehende Sätze in Bezug auf Reibung annehmen:

1) die Reibung vermehrt sich mit der Rauhigkeit der reibenden Flächen.

2) die Reibung ist unter übrigens gleichen Umständen dem senkrechten Drucke proportional.

3) die Reibung der Ruhe ist größer als die Reibung der Bewegung.

4) die gleitende Reibung ist größer als die rollende oder wälzende.

Zusatz IV. Setzt man, daß P den Druck bezeichnet, durch welchen ein reibender Körper gegen einen andern gepresst wird, und daß F die zur Ueberwindung der Reibung erforderliche Kraft ist, welche hier die Reibung heißt: so kann für jede Last P die Reibung F gefunden werden, wenn nur unter ähnlichen Umständen für eine andere Last P' die Reibung F' bekannt ist, weil sich nach vorigem Zusatz III. verhält $P' : F' = P : F$, also $F = \frac{F'}{P'} \cdot P$.

Z. B. bey Eichen- auf Eichenholz hat man gefunden, daß bey einem Gewicht oder Druck von 74 Pfund die Reibung 30 Pfund betrug, also ist hier $\frac{F'}{P'} = \frac{30}{74} = 0{,}4$. Diese Zahl $\frac{F'}{P'}$ kann man den Reibungscoefficienten $= \varphi$ nennen, so daß allgemein $F = \varphi \cdot P$ ist, wo dann der Werth von φ nach den besondern Umständen bestimmt werden muß.

Hätte man daher z. B. auf einer horizontalen eichnen Fläche einen Eichenklotz von 180 Pfund Gewicht fortzuziehen, so wäre die Reibung $F = \varphi \cdot P = 0{,}4 \cdot 180 = 72$ Pfund.

Zusatz V. Für gleitende Reibung kann man den Reibungscoefficienten

bey Holz	auf Holz,	oder φ	$= 0{,}5$
- Eisen	- Eisen,	- -	$= 0{,}3$
- Kupfer	- Eisen,	- -	$= 0{,}2$
- Messing	- Eisen,	- -	$= 0{,}12$

setzen

Für rollende Reibung kann man nach den besondern Umständen die Hälfte des Reibungscoefficienten der gleitenden Reibung annehmen.

Zusatz VI. Bey Maschinen ist aber noch ein Hinderniß wichtig, nämlich die Steifigkeit, Straffheit oder Unbiegsamkeit der Seile. Es gehört nämlich immer eine gewisse Kraft dazu, ein Seil gerade zu biegen, und ein Seil zu krümmen, z. B. um einen Cylinder oder um eine Scheibe zu biegen. Diese Kraft wird desto stärker seyn, je mehr das Seil bey seiner Verfertigung zusammengedreht, und je dicker es geworden ist, je stärker es von einer Last gespannt wird, und je kleiner der Durchmesser des Cylinders oder der Scheibe ist, um den es sich krümmt. Diese Kraft versteht man, wenn von der Größe der Steifigkeit der Seile die Rede ist. Erfahrungen müssen hier das Beste thun, um den durch die Straffheit der Seile herrührenden Widerstand zu bestimmen.

Nennt man allgemein in Zollen oder Fussen den Durchmesser eines Cylinders oder einer Scheibe, um welche ein Seil gekrümmt wird, $= d$, die Dicke des Seiles $= \delta$, und die Pfundzahl der spannenden Last $= P$, so ergibt sich aus den Resultaten verschiedner Versuche bey gleich stark gedrehten trocknen Seilen der Straffheitswiderstand für Rollen, Flaschenzüge, Winden &c. in Pfunden genau genug $= p = \frac{3}{4} \cdot \frac{\delta}{d} \cdot P = 0{,}75 \cdot \frac{\delta}{d} \cdot P$.

Sollte z. B. ein $\frac{1}{2}$ Zoll starkes Seil um den 8 Zoll starken Rundbaum eines Haspels gebogen werden, und es hing an dem Seile eine Last von 120 Pfund: so wäre die zum Biegen des Seiles erforderliche Kraft oder der Straffheitswiderstand $= p = 0{,}75 \cdot \frac{1}{2 \cdot 8} \cdot 120 = 5{,}4$ Pfund.

Für eiserne Ketten kann man in ähnlichem Sinne den Straffheitswiderstand $= p = 1{,}04 \cdot P$ oder $\frac{25}{24} \cdot P$ setzen [ſ. Aufgaben, grösstentheils aus der angew. Mathematik von J. A. Eytelwein, Berlin 1793. S. 61.].

Viertes Kapitel.

Von der Rolle, den Rollen- und Flaschenzügen, so wie von dem Rade an der Welle.

§. 32.

Erklärung. Die Rolle ist eine kreisförmige Scheibe, um deren Umfang ein Faden oder Seil gelegt, und welche in ihrem Mittelpuncte um eine auf der Ebene der Rolle winkelrechte Axe frey bewegt werden kann.

Bey den Rollen, wo die Axe keine mathematische Linie ist, kann die Umdrehung um dieselbe durch eine doppelte Vorrichtung bewerkstelliget werden. Entweder ist die Rolle in der Mitte durchbohrt, und wird um einen Polzen bewegt, welcher sich nicht mit umdreht, oder in der Mitte der Rolle sind Zapfen befestiget, welche sich mit der Rolle umdrehen. Damit der Faden von der Rolle nicht abgleite, wird am Umfange derselben eine Rinne eingeschnitten.

§. 33.

Erklärung. Dreht sich eine Rolle um ihre Axe, und man kann die Axe als unbeweglich ansehen, so heißt sie eine feste Rolle oder Leitrolle, und an dieser wirken die Kraft P und Last Q an beyden Enden des übergelegten Seiles [Tab. II. Fig. 22, 23.]. Wenn aber die Axe selbst beweglich ist, so heißt die Rolle eine lose Rolle oder Zugrolle, und die vertical hängende Last Q ist an ihr in der Mitte angebracht, die Kraft P wirkt aber an einem

Ende des umlegten Seils, indem das andere Ende irgendwo in S [Fig. 24.] befestiget ist.

Die Zugrolle erfordert, jedesmal ein Gehäuse oder eine Hülse, Schere, theils um in derselben den Zapfen oder Polzen der Rolle anzubringen, theils um die Last mittelst eines Hakens an der Hülse zu befestigen. Dagegen kann die feste Rolle auch ohne Hülse angewendet werden.

§. 34.

Lehrsatz. Bey der Leitrolle ist in ihrem Gleichgewichtszustand die Kraft P der Last Q [Fig. 22.] zwar gleich, es mögen die beyden Seiltrümer einander parallel oder unter einem beliebigen Winkel PEQ $= \delta$ gegen einander geneigt seyn; aber der aus P und Q gegen den Polzen C entstehende mittlere Druck $= R$ wird mit δ seine Größe ändern, so daß 1) $R = 2P \cdot \cos\frac{\delta}{2}$ oder 2) $R = P \cdot \frac{AB}{CA}$ ist.

Beweis. Zieht man die Halbmesser CA, CB nach den Berührungspuncten A, B der Richtungen der Kräfte EP, EQ: so ist CA auf EP, CB auf EQ winkelrecht [Geom. §. 134. Zus. III.], und nach §. 28., weil CA $=$ CB ist, auch P $=$ Q.

Weil ferner die beyden Triangel CAE, CBE congruent sind, so ist AE $=$ BE, und daher, weil auch P $=$ Q ist, EA : EB $=$ P : Q. Auch folgt aus der Congruenz der Triangel, daß $\alpha = \beta = \frac{\delta}{2}$ ist. Da nun, wenn man BR mit EA, AR mit EB parallel zieht, im Rhombus AEBR der Winkel bey E halbirt wird: so muß die Diagonale ER durch des Kreises Mittelpunct C gehen; und daher wird, weil der Winkel ACB halbirt wird, auch die

Sehne AB in ihrer Mitte D rechtwinklich halbirt [Geom. §. 131. Zus. 3)]. Der Druck gegen den Polzen C ist daher, nach §. 16. Zus. II. 4), $ER = R = P \cdot \cos\alpha + Q \cdot \cos\beta = 2P \cdot \cos\alpha = 2P \cdot \cos\frac{\delta}{2}$.

Da ferner $\frac{\delta}{2} = \alpha = CAD$ [Geom. §. 162.], so ist $\cos\frac{\delta}{2} = \frac{AD}{AC}$ [Geom. §. 249. für $r = 1$], und $2 \cdot \cos\frac{\delta}{2} = \frac{2AD}{AC} = \frac{AB}{AC}$, daher auch $ER = R = P \cdot \frac{AB}{AC}$.

Zusatz. Sind AP, BQ parallel, so wird $\delta = 0$, oder $AB = 2AC$. Daher dann $R = 2P = 2Q$.

Anmerkung. Bey der Leitrolle erspart man also nichts an Kraft, sie dient aber, den Kräften jede beliebige Richtung zu geben, oder die Richtungen der Kräfte verschiedentlich zu leiten; daher der Name Leitrolle.

Beyspiel. Ueber eine Göpelscheibe sey ein Seil gelegt, an dessen einem Ende eine volle Tonne angeschlagen ist, welche das Seil mit einer Kraft Q von 1320 Pfund anspannt; der Neigungswinkel des in den Treibeschacht hineingehenden Seiltrums sey EFG [Fig. 23.] $= \alpha = 72°$: so ist, weil das andere nach dem Korbe zugehende horizontale Seiltrum ebenfalls mit 1320 Pfund angespannt wird, $P = Q = 1320$ Pfund, und der Winkel $PEQ = \delta = 90° + (90° - \alpha) = 180° - \alpha = 180° - 72° = 108°$. Daher der auf den Zapfen C der Scheibe blos von den angespannten Seiltrümern entstehende mittlere Druck =
1) $R = 2P \cdot \cos\frac{\delta}{2} = 2 \cdot 1320 \cdot \cos 54° = 1552$ Pf. beträgt.

Nennt man nun noch das Gewicht der Scheibe $= G = 400$ Pfund: so entsteht aus dem bereits gefundnen R, welches nach CA drückt, und dem Gewicht G, welches vertical nach CB drückt, ein neuer mittlerer Druck nach der Richtung CR [§. 16.] $= R'$. Der Winkel, den die beyden Seitenkräfte CA, CB machen, ist $= ACB = AEG = \frac{\delta}{2} - (90° - \alpha) = \frac{180° - \alpha}{2} - 90° + \alpha = \frac{\alpha}{2}$. Daher nach §. 16. Zus. II. 6) der gesammte Druck auf den Zapfen C oder

2) $R' = \sqrt{(R^2 + 2R \cdot G \cdot \cos\frac{\alpha}{2} + G^2)}$
$= \sqrt{(1552^2 + 2 \cdot 1552 \cdot 400 \cdot \cos 36° + 400^2)}$
$= 1652$ Pf.

§. 35.

Lehrsatz. An der Zugrolle [Fig. 24.] findet ein Gleichgewicht Statt, wenn die Kraft P zur Last Q sich verhält, wie der Halbmesser der Rolle CA zur Sehne AB zwischen den Puncten, worin das Seil die Rolle berührt.

Beweis. 1) Die Richtungen der Seile sind, wie in der Figur, nicht parallel, sondern laufen rückwärts verlängert in den Punct D zusammen, durch welchen die verticale Richtung CD der Last von selbst gehen, und den Winkel bey D, folglich auch die Sehne AB in E rechtwinklich halbiren wird. Erhielte nun die Kraft P die Ueberwucht: so würde sich die Rolle zuerst um den Punct B drehen, als wäre BEA ein einarmiger Hebel, welchen die Last nach der verticalen Richtung CQ herab, die Kraft aber nach der schiefen AP hinaufzudrehen strebte. Wird nun auf letztre die Normale BF gezogen: so findet ein Gleichgewicht Statt, wenn P : Q = BE : BF [§. 29.] = AE : BF ist. Ziehet man nun CA, welche auf die Tangente PD winkelrecht [Geom. §. 134. Zus. III.], folglich mit BF parallel ist: so ist CAE = ABF [Geom. §. 113. III.], und bey E und F sind rechte Winkel, folglich AE : AC = BF : AB [Geom. §. 159.], oder AE : BF = AC : AB = P : Q.

2) Sind die Richtungen parallel: so kommt AB in die Lage ab, und es wird aus der Sehne nun der Durchmesser. Dann aber ist AC : ab = AC : 2AC = 1 : 2 = P : Q.

Zusatz I. Da CAB = $\frac{ADB}{2} = \frac{\delta}{2}$, und AC : AE = 1 : $\cos\frac{\delta}{2}$ [Geom. §. 249.], oder AC : AB = 1 : 2 · $\cos\frac{\delta}{2}$: so ist auch P : Q = 1 : 2 · $\cos\frac{\delta}{2}$.

Ist $\delta = 0$, d. h. sind die Seile parallel, so ist $P:Q = 1:2$, also $P = \frac{1}{2}\cdot Q$. Daher wird jedes Seil mit einer Kraft $= \frac{1}{2}\cdot Q$ angespannt, oder jedes Seil trägt $= \frac{1}{2}\cdot Q$.

Zusatz II. Soll die Zugrolle mit der Last, bey verticalen Richtungen des Seils, um eine gewisse Höhe gehoben werden: so muß sich das Seil an jeder Seite um so viel verkürzen, als die Hubhöhe beträgt; da dann beyde Verkürzungen an dem Ende, wo die Kraft wirkt, zusammenkommen, daß also die Kraft um den doppelten Raum fortrücken muß. Demnach sind auch hier die Kräfte umgekehrt wie ihre Wege gegen einander im Verhältniß.

Anmerkung. Da Scheibe, Bolzen, Schere und Seile auch schwer sind: so muß bey der Zugrolle dieser Dinge Gewicht mit zur Last gerechnet werden.

Beyspiel. Es soll eine Last von 120 Pf. mittelst einer Rolle, welche 15 Pf. schwer ist, in die Höhe gezogen werden, die Richtungen der Seile machen aber an jeder Seite mit dem Horizonte einen Winkel $\varepsilon = 55°$ [Fig. 24.]: wie groß wird die Kraft P seyn müssen, Seilesbiegung und Zapfenfriction bey Seite gesetzt?

In diesem Falle ist $Q = 120 + 15 = 135$ Pf., und $\delta = 180° - 2\varepsilon = 180° - 2\cdot 55° = 180° - 110° = 70°$. Daher nach Zusatz I. $P = \frac{Q}{2\cdot \cos\frac{\delta}{2}} = \frac{135}{2\cdot \cos 35°} = 82{,}4$ Pf.

Wären die Seile parallel, so wäre $P = \frac{Q}{2} = \frac{135}{2} = 67{,}5$ Pf.

§. 36.

Erklärung. Die Verbindung mehrerer einzelner Rollen durch darüber geschlungne Seile, um mit Hilfe derselben eine Last zu heben, heißt ein **Rollenzug.** Befinden sich hingegen mehrere Rollen in einerley Gehäuse oder Hülse über oder neben einander, so daß sich keine Rolle ohne das Gehäuse von der Stelle bewegen kann: so heißt eine solche engere Verbindung der Rollen ein **Kloben** oder **Flasche.** Die Verbindung zweyer Flaschen mittelst Seile heißt ein **Flaschenzug,** wo man, wie bey den Rollen, die bewegliche Flasche von der unbeweglichen unterscheidet.

Zusatz. Eine mitunter vorkommende Einrichtung eines Rollenzuges ist Fig. 25., wo an der untersten beweglichen Rolle B die Last Q hängt. Ueber derselben befinden sich mehr oder weniger bewegliche Rollen wie bey D, F, und jedes Seil, welches um eine Rolle geht, ist mit dem einen Ende oberhalb wie bey A, C, E an einer festen Wand, und mit dem andern Ende wie bey D, F an der Hülse der darüber befindlichen Rolle befestigt. Das letzte Seil FGH geht über eine Handrolle G, welche fest ist, so daß mittelst einer am Ende des Seils GH angebrachten Kraft V die Last Q gehoben werden kann. Bey dieser Einrichtung ist es aber nicht möglich, die Last Q bis zur Handrolle G zu erheben, weil sich D von F, B von D desto mehr entfernt, je näher die Rolle F nach G kommt.

Die Flaschenzüge können auf mancherley Art angeordnet werden, wie Fig. 26. 27. 28., wo Fig. 26. und 28. zu den gewöhnlichsten Einrichtungen gehören. Außer den in jeder Flasche abgebildeten Rollen können noch mehrere über und neben einander angebracht werden, wobey es jedesmal nur darauf ankommt, daß man den Anfang des Seils entweder an der unbeweglichen oder beweglichen Flasche, also wie in Fig. 26. entweder in A, oder wie in Fig. 27. in A befestiget, und sodann bey diesen solches zuerst um die kleinsten, und dann um die größern Rollen herumlegt. In Fig. 28. wird gewöhnlich das Seil an der obern oder unbeweglichen Flasche an einem Haken befestiget, und das Seil über jedes Paar Rollen, die durch Scheider abgesondert sind, gelegt. Hat die Kraft V, welche am Ende des Seils wirkt, eben die Richtung wie die Last Q: so sind HK, Fig. 26., LM, Fig. 27. und E, Fig. 28. Handrollen. Will man, daß bey der Anordnung eines Flaschenzuges in beyden Flaschen gleich viel Rollen in jeder Flasche in Thätigkeit kommen sollen: so muß der Anfang A des Seils an derjenigen Flasche befestiget werden, um welche das letzte Ende V des Seiles geschlagen ist, wie Fig. 26. 28. Im entgegengesetzten Falle, wie Fig. 27., wird allemal an derjenigen Flasche, woran das Seil befestiget ist, eine Rolle weniger als bey der andern Flasche erfordert.

Bey den nachstehenden Untersuchungen wird jedesmal vorausgesetzt, daß die Richtungen der gespannten Seile parallel sind, weil die etwaige geringe Abweichung von der parallelen Lage bey gut angeordneten Rollen und Flaschenzügen keinen erheblichen Einfluß auf die Vermehrung der Kraft haben kann.

§. 37.

Aufgabe. Aus der gegebnen Last Q beym Rollenzuge die Größe der Kraft V zu finden, wenn man die Seile als vollkommen biegsam annimmt und die Zapfenreibung bey Seite setzt.

Auflösung. Die Anzahl der beweglichen Rollen B, D, F, [Fig. 25.] sey = n, und das Gewicht einer jeden beweglichen Rolle = M: so ist nach §. 35. 2)

die Kraft v an der 1sten Rolle $= \frac{1}{2}(Q+M)$

" " v' " " 2ten " $= \frac{1}{2}(v+M)$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(Q+M)+\frac{1}{2}M$

$= \frac{1}{2^2}\cdot Q+(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2})M$

" " v'' " " 3ten " $= \frac{1}{2}(v'+M) = \frac{1}{2^3}\cdot Q$

$+(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2})M$,

und man erhält auf eine ähnliche Art die Kraft V' an der letzten oder nten Rolle

$$V' = \frac{1}{2^n}Q + \left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-2}}+\ldots\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}\right)M$$

$$= \frac{1}{2^n}Q + \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\frac{1}{2^n}\right)M.$$

Die Zahlen in der Parenthese bilden eine geometrische Reihe*), von welcher n die Anzahl der Glieder und $\frac{1}{2}$ das erste Glied und der Exponent

---

*) **Erklärung.** Eine geometrische Reihe ist die Fortsetzung der Glieder einer (geometrischen) stetigen Proportion [Geom. §. 52. Zus.]. Bedeutet nun S die Summe der Glieder einer solchen Reihe, und n die Anzahl der Glieder: so ist

$$S = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots ae^{n-1}$$

folglich $eS = ae + ae^2 + ae^3 + \ldots ae^{n-1} + ae^n$

demnach $eS - S = (e-1)S = ae^n - a = a(e^n - 1)$,

und daher $S = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$, wo a das erste Glied und e der Exponent ist.

ist; daher findet man die Summe dieser Reihe = $\frac{\frac{1}{2}[(\frac{1}{2})^n - 1]}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{1 - 2} = \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{-1} = \frac{-1 + \frac{1}{2^n}}{-1} = 1 - \frac{1}{2^n}$. Es ist daher

$$V' = \frac{1}{2^n} Q + (1 - \frac{1}{2^n}) M = \frac{Q - M}{2^n} + M.$$

Da nun die Richtung der Kraft V' mittelst des Seiles über die Handrolle G geht, und daher V' = V bleibt [§. 34.]: so findet man die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft

1) $V = \frac{Q - M}{2^n} + M$, wo n die Anzahl der beweglichen Rollen bezeichnet.

Wird das Gewicht der Rollen bey Seite gesetzt, so ist M = 0, also

2) $V = \frac{Q}{2^n}$.

Beyspiel. Ein Rollenzug besteht aus drey beweglichen Rollen, deren jede 6 Zoll im Durchmesser hat und 12 Pf. wiegt. Mittelst derselben soll eine Last von 800 Pf. an einem 1 Zoll starken Seile über eine Handrolle von 8 Zoll Durchmesser in die Höhe gezogen werden; man sucht die dazu erforderliche Kraft. Hier ist

$$V = \frac{800 - 12}{2^3} + 12 = \frac{788}{8} + 12$$
$$= 98{,}5 + 12 = 110{,}5 \text{ Pf.}$$

Will man auf die Seilesbiegung mit Rücksicht nehmen, so kann man hier solche hinlänglich genau $= 0{,}75 \cdot m \cdot \frac{\delta}{d} \cdot V$ [§. 31. Zus. VI.] annehmen, wo m die Anzahl aller Rollen, über welche Seile gehen, und d den mittlern Durchmesser dieser Rollen bedeutet. Demnach wäre die Kraft wegen der Seilesbiegung $= 0{,}75 \cdot \frac{1}{6{,}5} \cdot 4 \cdot 110{,}5 = 50{,}8$ Pf., und demnach $V = 110{,}5 + 50{,}8 = 161{,}3$ Pf.

Zusatz. Aus $\frac{Q-M}{2^n} + M = V$ findet man

1) $Q = 2^n (V - M) + M$ und

2) $n = \frac{\log(Q-M) - \log(V-M)}{\log 2}$ [Geom. §.63. u. Zus. III.]

Beyspiel I. Mittelst einer Kraft von 60 Pf. will man durch einen Rollenzug, welcher aus 3 Rollen besteht, und wo jede 12 Pf. schwer ist, eine Last in die Höhe heben; wie groß muß diese seyn, wenn Seilesbiegung und Zapfenfriction bey Seite gesetzt werden?

$Q = 2^3 (60 - 12) + 12 = 8 \cdot 48 + 12 = 384 + 12 = 396$ Pf.

Beyspiel. II. Man sucht die Anzahl der erforderlichen beweglichen Rollen bey einem Rollenzuge, wenn jede 12 Pf. wiegt und mit einer Kraft von $110\frac{1}{2}$ Pf. einer Last von 800 Pf. das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Hier ist

$\log(Q-M) = \log(800-12) = \log 788 = 2{,}89653$

$\log(V-M) = \log(110{,}5 - 12) = \log 98{,}5 = 1{,}99344$

$0{,}90309$

$\log 2 = 0{,}30103$; folglich ist die Anzahl der erforderlichen Rollen oder $n = \frac{0{,}90309}{0{,}30103} = 3$.

§. 38.

Aufgabe. Bey dem Flaschenzuge die für das Gleichgewicht erforderliche Kraft zu finden, wenn auf Steifigkeit der Seile und auf Zapfenfriction nicht Rücksicht genommen wird.

Auflösung. Es sey V die gesuchte Kraft, Q die an dem Flaschenzuge hängende Last, M das Gewicht der untern oder beweglichen Flasche: so ist die Last $= Q + M$.

Diese Last $Q + M$ hängt nun in Fig. 26. an den vier Seilen AB, CD, EF, GH, und jedes Seil trägt daher $= \frac{1}{4}(Q + M)$ [§. 35. Zus. I.]. Einen solchen Theil also hat die Kraft nur zu halten, und es ist daher in diesem Falle $V = \frac{1}{4}(Q + M)$.

In Fig. 27. hängt die Last an den fünf Seilen BA, CD, EF, GH, KL, und es ist daher $V = \frac{1}{5}(Q+M)$.

In Fig. 28., wo das Seil an der obern Flasche befestiget ist, hängt die Last an sechs Seilen, und es ist daher $V = \frac{1}{6}(Q+M)$.

Nennt man daher n die Anzahl der angespannten Seile, so ist die Kraft $V = \frac{1}{n}\cdot(Q+M)$.

Sowohl in Fig. 26. als Fig. 27. können die Seile KL und MN nicht unter der Zahl n begriffen seyn, weil selbige die Last nicht tragen, und es zur Erhaltung der Last einerley ist, ob diese Seile über die Handrollen HK oder LM gehen, oder ob solche ohne Handrolle nach verticaler Richtung GH [Fig. 26.] oder KL [Fig. 27.] aufwärts angezogen werden; und eben so verhält es sich in Fig. 28.

Beyspiel. An einem Flaschenzuge, wie Fig. 26. angeordnet, hängt eine Last von 300 Pf., und die untere Flasche wiegt 40 Pf. In der untern und obern Flasche ist der Durchmesser der größern Rolle 6 Zoll, der kleinern 4 Zoll, und die Stärke des Seils 10 Linien; wie groß wird V seyn müssen? $V = \frac{340}{4} = 85$ Pf.

Wegen der Seilesbiegung kann man eine einzige Rolle sich denken, deren Durchmesser der mittlere der Rollen hier $= \frac{6+4}{2} = 5$ Zoll $= d$ ist, und die Seilesbiegung $= 0{,}75 \cdot m \cdot \frac{\delta}{d} \cdot V$ setzen, wo m die Anzahl aller Rollen, über welche Seile gehen, bedeutet. Es wären demnach hier wegen der Seilesbiegung noch $= 0{,}75 \cdot 4 \cdot \frac{10}{5 \cdot 12} \cdot 85 = 42{,}5$ Pf. zu rechnen, und demnach $V = 85 + 42{,}5 = 127{,}5$ Pf. zu setzen.

§. 39.

Erklärung. Ein **Rad an der Welle** oder eine **Radwelle** ist eine kreisförmige Scheibe DE [Fig. 29.], welche mit einem Cylinder AB, der **Welle**, so verbunden ist, daß die Fläche der Scheibe oder des **Rades** winkelrecht so auf der Axe FG der Welle steht, daß beyder Axen eine einzige ausmachen, und eins ohne das andere nicht umgedreht werden kann. An den Enden der Welle bey F und G sind Zapfen in der verlängerten Wellaxe angebracht, welche durch **Pfannen** oder **Zapfenlager** unterstützt sind, und sich in denselben leicht umdrehen können. Am Umfange des Rades wirkt gewöhnlich eine Kraft P nach der Richtung der Tangente DP desselben, die einer Last Q am Umfange der Welle, oder auch an einem zweyten Rade das Gleichgewicht hält.

Zusatz. Liegt die Welle horizontal, so heißt das Rad an der Welle eine **liegende Welle** oder ein **Haspel**, und wenn die Welle vertical steht, eine **stehende Welle**, eine **Winde** oder ein **Göpel**. Jene werden **Radhaspel**, **Kreuzhaspel** und **Hornhaspel** genannt, je nachdem die Kraft mittelst eines Rades, oder durch Speichen oder durch eine Kurbel (**Haspelhorn**) wirkt.

Ist das Rad so eingerichtet, daß Menschen und Thiere darin herumgehen, oder von ausen darauf treten können: so heißt es im ersten Falle ein **Laufrad**, im andern ein **Tretrad**. Hiermit ist die **Tretscheibe** verwandt, deren Welle gegen den Horizont etwas geneigt ist.

Auch gehören hieher die **Wasserräder**, die **Windflügel** bey Windmühlen, die **Seilräder** u. dergl.

§. 40.

Lehrsatz. Wirken Kraft und Last an der Radwelle nach den Tangenten des Ra=

des und der Welle: so verhält sich im Stande des Gleichgewichts die Kraft P (= P') zur Last Q [Tab. III. Fig. 30.], wie der Halbmesser der Welle zum Halbmesser des Rades.

Beweis. Wirken Kraft und Last nach Tangenten des Rades und der Welle, so ist es einerley, ob die Welle liegend oder stehend angenommen wird. Nur in Hinsicht der Reibung an den Zapfen entsteht ein Unterschied in Absicht der Kraft für das Gleichgewicht. Wird die Reibung, Seilesbiegung u. dergl. noch bey Seite gesetzt, und man nennt den Halbmesser des Rades CD (= CD') = a, den Halbmesser der Welle CA = b, die Kraft in D = P (in D' = P' = P), die Last am Umfange der Welle in A aber = Q: so ist für das Gleichgewicht nach §. 19. Zus. I. 2) oder nach §. 29. Zus. aP = bQ, also P : Q = b : a [Geom. §. 55.] = CA : CD.

Zusatz I. Aus aP = bQ folgt

1) $P = \frac{b}{a} \cdot Q$, und 2) $Q = \frac{a}{b} \cdot P$.

3) $a = \frac{Q}{P} \cdot b$, „ 4) $b = \frac{P}{Q} \cdot a$.

Die Kraft $P = \frac{b}{a} Q$ nennt man die auf den Kraftpunct D [Fig. 30.] reducirte Last Q; so wie $Q = \frac{a}{b} \cdot P$ die auf den Lastpunct A reducirte Kraft P.

Zusatz II. Wären die Kräfte unmittelbar am Umfange des Rades und der Welle angebracht: so beschrieben sie bey einer Umdrehung der Welle die Peripherien der beyden Kreise, die sich wie ihre Halbmesser verhalten [Geom. §. 170. Zus. I.]. Folglich verhalten sich bey der Radwelle wie §. 19. Zus. II. und §. 29. Zusatz die Kräfte umgekehrt wie ihre Wege, die sie in gleicher Zeit zurücklegen, und im Sinn des §. 19. Zus. III. sind auch hier die mechanischen Momente für den Gleichgewichtszustand gleich.

Anmerkung. In der Ausübung muß man die halbe Dicke des Seils, woran die Last hängt, zum Halbmesser der Welle addiren, wodurch das Moment der Last vergrößert wird. Dieß geschieht noch mehr, wenn sich das Seil doppelt über einander legt. Auch kommt das Gewicht des herabhängenden Seils, zumal wenn es stark oder sehr naß ist, mit zur Last.

Es können an der Welle auch zwey Seile herabhängen, von denen das eine sich abwickelt, indem das andere sich aufwickelt, wie dieß beym Haspel und Göpel gewöhnlich der Fall ist.

Beyspiel I. An einem zweymännischen Haspel, welcher über einem seigern Schachte steht, sey die Länge der Kurbel oder die Höhe des Haspelhorns CD [Fig. 31.] = 18 Zoll, der Durchmesser des Rundbaums AB = D = 8 Zoll, die Seilesstärke = δ = $\frac{3}{4}$ Zoll, der Halbmesser der Zapfen des Rundbaums = r = 0,3 Zoll, das Gewicht des armirten Rundbaums = G = 100 Pf., das Gewicht eines leeren Kübels = k = 40 Pf.; und die im Kübel eingefüllte Masse (Gänge) = M = 120 Pf.: wie groß wird die für den Gleichgewichtszustand an dem Kraftpunct oder an der Spille des Haspelhorns in D erforderliche Kraft P zur Erhaltung der Last und Ueberwältigung der übrigen Bewegungshindernisse seyn müssen?

Auflösung. Für diesen Fall ist die Entfernung der Last von der Umdrehungsaxe des Rundbaums oder b = $\frac{D+\delta}{2}$ [§. 40. Anm.] = $4\frac{3}{8}$ = 4,375 Zoll; die Entfernung der Kraft von der Drehungsaxe = a = 18 Zoll.

Da bey den Haspeln die Seile nicht sehr stark gemacht werden, und daher ihr Gewicht schon auf große Längen eben nicht beträchtlich ist, auch das in den Schacht hineingehende Seiltrum dem herausgehenden zu Hilfe kommt: so kann man das ohnehin immer veränderliche Gewicht des Seils bey Seite setzen, und es besteht daher die eigentliche Last aus dem Gewicht des vollen (herausgehenden) Kübels K [Fig. 31.], welchem jedoch das Gewicht des leeren (hineingehenden) Kübels K' zu Hilfe kommt. Ersteres ist = k + M, letzteres = k, daher die eigentliche Last oder

1) W = k + M − k = M = 120 Pf. Die übrigen Bewegungshindernisse bestehen hier

2) in der Seilesbiegung des Seiltrums für den vollen Kübel am Rundbaum = W', weil die für den leeren Kübel zu unbeträchtlich wird.

3) in der Zapfenfriction = W'', welche beyde Hindernisse, W', W'', ebenfalls als herabhängende Gewichte zu betrachten und auf den Lastpunct zu reduciren sind.

Nach §. 31. Zus. VI. ist die Seilesbiegung $= W'$ $= 0{,}75 \cdot \frac{\delta}{D} \cdot (W + k) = 0{,}75 \cdot \frac{3}{4 \cdot 8} \cdot (120 + 40) =$ $0{,}75 \cdot \frac{3}{32} \cdot 160 = 11{,}2$ Pf.

Die Zapfenfriction entsteht eigentlich aus den Gewichten der beyden Kübel, der eingefüllten Masse und dem Gewichte des armirten Rundbaums, wird aber bey dem Gange der Maschine wegen der schon gefundnen W' noch vermehrt. Daher beträgt der Druck auf die Zapfen, welchen man jedoch nur auf einem sich denkt, $= R = M + 2k + G + W' = 120 + 80 + 100 + 11{,}2 = 311{,}2$ Pf. Nach §. 31. Zus. IV. und V. ist daher die Friction am Umfange des Zapfens $= F = \varphi \cdot R = 0{,}3 \cdot 311{,}2 = 93{,}36$ Pf.; und daher die auf den Lastpunct reducirte Zapfenfriction nach §. 40. Zus. I, 1) $W'' = \frac{r}{b} \cdot F = \frac{0{,}3}{4{,}375} \cdot 93{,}36 =$ $6{,}4$ Pf.

Es ist demnach die am Umfange des Rundbaums befindliche gesammte Last, welche also aus der eigentlichen Last und der Hindernißlast besteht, nämlich

4) $Q = W + W' + W'' = 120 + 11{,}2 + 6{,}4 = 137{,}6$ Pf.

Daher die für dem Gleichgewichtszustand an den Kraftpunct in D erforderliche Kraft

5) $P = \frac{b}{a} \cdot Q = \frac{4{,}375}{18} \cdot 137{,}6 = 33{,}44$ Pf., wofür man 34 Pf. setzen kann.

Ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse wäre

$$P = \frac{4{,}375}{18} \cdot 120 = 29{,}1 \text{ Pf.}$$

Beyspiel II. Mit einer stehenden Welle AB [Fig. 32.] soll eine Last $L = 300$ Pf. in die Höhe gezogen werden. Die mechanische Schwengellänge oder die Entfernung der Kraft von der Drehaxe sey $CD = a = 7$ Fuß, der Durchmesser der Welle $= D = 1$ Fuß, die Seilesstärke $= \delta$ $= \frac{3}{4}$ Zoll, also die Lastentfernung $= \frac{D + \delta}{2} = b = 6\frac{3}{8}$ Zoll $= 6{,}375$ Zoll $= 0{,}53$ Fuß; ferner sey der Halbmesser der Zapfen A und B $= r = \frac{1}{2}$ Zoll, der Halbmesser der Scheibe HE $= R = 6$ Zoll, der Halbmesser ihrer Zapfen $= \rho = 0{,}33$ Zoll, das Gewicht dieser Scheibe $=$ $g = 5$ Pf., und das Gewicht der armirten Welle AB $=$ $G = 230$ Pf.; wie groß ist die für das Gleichgewicht mit Hinsicht auf die verschiednen Bewegungshindernisse an dem Kraftpunct in D erforderliche Kraft?

Auflösung. Die sämmtlichen Widerstände bey dieser Maschine bestehen

1) aus der eigentlichen Last $L = W = 300$ Pf.,
2) aus der Seilesbiegung an der Scheibe HE. Sie sey $= W'$,
3) aus der Zapfenfriction an dieser Scheibe $= W''$,

4) aus der Seilesbiegung an der Welle in G. Sie sey $= W'''$.

5) aus der Zapfenfriction des obern Zapfens B $= W''''$, und

6) aus der Zapfenfriction des untern Zapfens A $= W'''''$, welche Hindernisse alle auf den Lastpunct zu reduciren sind, und sich auf folgende Weise im Allgemeinen bestimmen lassen. Es ist nämlich

$$W' = 0{,}75 \cdot \frac{\delta}{2R} \cdot W = 0{,}75 \cdot \frac{0{,}75}{12} \cdot 300 = 14 \text{ Pf.}$$

Der Widerstand W'' hängt ab von dem auf den Zapfen der Scheibe in K entstehenden mittlern Druck. Dieser mittlere Druck entsteht aber aus dem Verticaldruck der eigentlichen Last W, dem schon gefundnen W' und dem Gewicht der Scheibe g, ferner aus einem Horizontaldruck nach der Welle zu wegen der Widerstände W und W'. Ersterer ist nach $KM = q = W + W' + g = 300 + 14 + 5 = 319$ Pf.; letztrer ist nach $KN = q' = W + W' = 314$ Pf. Daher der mittlere Druck auf den Zapfen der Scheibe nach §. 15. nach der Richtung $KR = p = \sqrt{(q^2 + q'^2)} = \sqrt{(319^2 + 314^2)} = \sqrt{200357} = 448$ Pf. Demnach

$$W'' = \varphi \cdot \frac{\rho}{R} \cdot p = 0{,}3 \cdot \frac{0{,}33}{6} \cdot 448 = 7{,}4 \text{ Pf.}$$

Der Widerstand W''' entsteht in G aus den horizontal spannenden Kräften W, W', W'', und es ist daher

$$W''' = 0{,}75 \cdot \frac{\delta}{D} (W + W' + W'') =$$
$$= 0{,}75 \cdot \frac{3}{4 \cdot 12} (300 + 14 + 7{,}4) = 15{,}2 \text{ Pf.}$$

Die Friction am obern Zapfen B besteht in einer Seitenreibung, und hängt ab von W, W'. W'', W''', so daß also

$$W'''' = \varphi \cdot \frac{r}{b} \cdot (W + W' + W'' + W''') = 0{,}3 \cdot \frac{0{,}5}{6{,}375} \cdot (300 + 14 + 7{,}4 + 15{,}2) = 8 \text{ Pf. ist.}$$

Die Friction am untern Zapfen A entsteht blos aus dem Gewicht der armirten Welle und ist nach Gründen der höhern Analysis $= \varphi \cdot \frac{2}{3} \cdot G$. Daher

$$W''''' = \varphi \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \frac{r}{b} \cdot G = 0{,}3 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \frac{0{,}5}{6{,}375} \cdot 230 = 3{,}6 \text{ Pf.}$$

Es sind demnach die am Lastpuncte oder am Umfange der Welle in G gesammten Widerstände, oder

7) $Q = W + W' + W'' + W''' + W'''' + W''''' = 300 + 14 + 7{,}4 + 15{,}2 + 8 + 3{,}6 = 348{,}2$ Pf.

Demnach die an den Kraftpunct D nöthige Kraft oder

8) $P = \frac{b}{a} \cdot Q = \frac{0{,}53}{7} \cdot 348{,}2 = 26{,}4$ Pf., wofür man 27 Pf. setzen kann.

Zusatz III. Bey dem Laufrade [§. 39. Zus.], wo ein Mensch oder Thier innerhalb des Rades am innern Umfange nur durch sein Gewicht vertical wirkt, kann nur ein Theil dieses Gewichts auf die Umdrehung des Rades verwandt werden. Es sey Fig. 33. AC = a der innere Halbmesser des Rades, an welchem in A ein Gewicht P vertical niederwärts wirkt; BC = b der Halbmesser der Welle und die halbe Stärke des Seils, woran die gesammte Last Q (eigentliche Last und Hindernißlast) hängt, und der Winkel, welchen AC mit dem verticalen Halbmesser CD einschließt, oder ACD = α. Zerlegt man nun die Kraft P nach AE in der verlängerten Richtung des Halbmessers CA, und nach AT in der Richtung der Tangente, weil der Punct A nur nach dieser Richtung ausweichen kann: so ist die Kraft nach AT = $P \cdot \sin \alpha = V$.

Die Kraft AE = $P \cdot \cos \alpha = N$ wird zwar durch die befestigte Axe C aufgehoben, aber sie vermehrt eben dadurch den Druck gegen die Zapfenlager.

Die Kraft V muß nun für den Gleichgewichtszustand der Last Q das Gleichgewicht halten, und daher $aV = bQ$ seyn.

Die gesammte Last Q besteht aber hier
1) aus dem Gewicht oder Widerstand der eigentlichen Last = W,
2) aus der Seilesbiegung an der Welle = W' und
3) aus der Zapfenfriction = W''.

Letztre entsteht aus einem mittlern Druck = R, welcher von der Kraft N, dem Gewichte des armirten Rades und der Welle = G und den Widerständen $W + W'$ herrührt; und es ist daher $R = \sqrt{[N^2 + 2N \cdot (G + W + W') \cdot \cos \alpha + (G + W + W')^2]}$ [§. 16. Zus. II. 6)], so daß also $W'' = \varphi \cdot \frac{r}{b} \cdot R$ wird, wenn r den Halbmesser des Zapfens an der Welle bedeutet. Für den Gleichgewichtszustand ist demnach auch

$$aV = b(W + W' + W'').$$

Gewöhnlich ist für Menschen und Esel beym Laufrade der Winkel ACD = α = 30°, für Pferde und Ochsen ist α = 20°, wo der Punct A den Mittelpunct eines Schrittes bezeichnet. Nach mehreren Erfahrungen rechnet man im Mittel das Gewicht P für einen Menschen = 150 Pf.

"	"	Esel	= 300 "
"	"	Ochsen	= 750 "
"	"	Pferd	= 850 "

Der Durchmesser der Laufräder richtet sich nach der Höhe der Thiere, welche sie umdrehen sollen; doch macht man ihn nicht unter 12 und nicht über 36 Fuß. Eben so ist es mit der Breite des Rades. Für einen Menschen rechnet man 18 bis 20 Zoll, für zwey neben einander 40 bis 44 Zoll, für einen Esel 2 Fuß, für zwey $4\frac{1}{2}$ Fuß, für einen Ochsen oder Pferd 3 bis 4 Fuß, für zwey 7 bis 8 Fuß.

Zusatz IV. Auf ähnliche Art läßt sich die Anwendung auf das Tretrad machen, welches aber für dem arbeitenden Menschen sowohl, als für ein arbeitendes Thier viel unbequemer, und eben darum weniger brauchbar ist.

Beyspiel. Mittelst eines Laufrades soll durch Menschen eine Last 800 Pf. schwer in die Höhe gezogen werden. Die Höhe des Rades betrage 24 Fuß, also $a = 12$ Fuß; der Durchmesser der Welle $= D = 2\frac{1}{2}$ Fuß $= 30$ Zoll, die Seilesstärke $\delta = 1$ Zoll, also $b = \frac{D+\delta}{2} = 15{,}5$ Zoll $= 1{,}29$ Fuß. Ferner sey das Gewicht der Maschine $= G = 50$ Centner $= 5500$ Pf., und der Halbmesser der Zapfen der Welle $= r = 1{,}5$ Zoll; wie groß muß die statische Kraft V seyn?

Auflösung. In diesem Beyspiele ist $W = 800$ Pf.

$$W' = 0{,}75 \cdot \frac{\delta}{D} \cdot W = 0{,}75 \cdot \tfrac{1}{30} \cdot 800 = 20 \text{ Pf.}$$

Ferner ist der Druck $N = P \cdot \cos\alpha$, wo P das verticale Gewicht der Menschen oder Thiere bedeutet. Aus dem statischen Verhältniß $\frac{b}{a}$ und dem Widerstand W muß sich schon vorläufig ergeben, wie viel Menschen oder Thiere zum Umtriebe des Rades nöthig sind. Denn setzt man $\frac{b}{a} \cdot W = P \cdot \sin\alpha$, so ist wenigstens $P = \frac{b}{a} \cdot \frac{W}{\sin\alpha}$. Für dieses Beyspiel hier wäre also wenigstens $P = \frac{1{,}29}{12} \cdot \frac{800}{\sin 30^\circ} = 172$ Pf., und es sind demnach zur Umdrehung des Rades 2 Menschen nöthig, weil das Gewicht eines Menschen zu 150 Pf. gerechnet wird. Es ist demnach $N = P \cdot \cos\alpha = 300 \cdot \cos 30^\circ = 260$ Pf. und der mittlere Druck auf die Zapfen $= R = \sqrt{[260^2 + 2 \cdot 260 \cdot (5500 + 800 + 20) \cdot \cos 30^\circ + (5500 + 800 + 20)^2]} = 6337$ Pf., also $W'' = 0{,}3 \cdot \frac{1{,}5}{15{,}5} \cdot 6337 = 184$ Pf. Demnach die gesammte Last $Q = W + W' + W'' = 800 + 20 + 184 = 1004$ Pf., und daher $V = \frac{b}{a} \cdot Q = \frac{1{,}29}{12} \cdot 1004 = 107{,}92$

Pf., wofür man 108 Pf. setzen kann. Da nun aber $P \cdot \sin\alpha = V$, so ist für Menschen $P = \frac{V}{\sin\alpha} = \frac{108}{\sin 30^\circ} = 216$ Pf.; und es wären demnach zur Bewegung des Rades zwey Menschen erforderlich, wenn das Gewicht eines Menschen zu 150 Pf. angenommen wird.

Fünftes Kapitel.

Von der schiefen Ebene, dem Keile und der Schraube.

§. 41.

Erklärung. Jede feste gegen den Horizont geneigte Ebene heißt hier eine schiefe Ebene.

Wird die schiefe Ebene ABB' [Fig. 34.] durch die Verticalebene ACA' in AA', und durch die Horizontalebene CBB' in BB' geschnitten: so wird hier vorausgesetzt, daß nicht nur die Durchschnittslinien AA', BB' mit einander parallel seyn sollen, sondern daß auch die Richtungen der Kräfte, welche auf Körper wirken, die sich auf der schiefen Ebene befinden, in einerley Verticalebene fallen, welche auf den Durchschnittslinien AA', BB' rechtwinklich stehet.

Die Verticalebene durch ABC sey auf dem Durchschnitt BB' winkelrecht, der rechtwinkliche Triangel ABC also ein verticaler Schnitt der schiefen Ebene mit dem Horizont: so nennt man den Winkel ABC $= \alpha$ den Neigungswinkel der schiefen Ebene gegen die Horizontalebene [Geom. §. 176.]; ferner die Linie AB die Länge, AC die Höhe, und BC die Grundlinie der schiefen Ebene.

Befindet sich ein Körper auf der schiefen Ebene, so wird derselbe irgend einen winkelrechten Druck

auf die Länge der schiefen Ebene ausüben, welchen man den **Normaldruck**, so wie die Kraft, mit welcher der Körper längs der schiefen Ebene sich fortzubewegen strebt, sein **Herabgleitungstrieb**, **Nebentrieb** oder auch sein **relatives Gewicht** heißt.

§. 42.

Aufgabe. Die Bedingungen für das Gleichgewicht eines auf der schiefen Ebene befindlichen Körpers zu finden, wenn die Richtung der Kräfte durch seinen Schwerpunct geht.

Auflösung. Auf der schiefen Ebene AB [Fig. 35.] befinde sich ein Körper, dessen Schwerpunct in G sey, und dessen Gewicht Q nach der verticalen Richtung GQ wirkt. Ist der Körper dadurch gegen das Umfallen gesichert, daß die Verticale GD noch innerhalb seiner Grundfläche fällt: so wird er, sich selbst überlassen, auf der schiefen Ebene nach der Richtung AB herabgleiten. Soll dieß verhindert werden und ein Gleichgewicht entstehen: so wird eine im Schwerpuncte G angebrachte Kraft P nach irgend einer Richtung GP auf den Körper wirken müssen. Es sey nun die durch den Schwerpunct gezogene Linie GM mit der Grundlinie BC parallel, und der Winkel, welchen die Richtung der Kraft P mit dem Horizonte macht, nämlich Winkel PGM $= \beta$, und ABC $= \alpha$: so lässt sich unter der Voraussetzung, daß die auf AB winkelrechte Linie GF noch innerhalb der Grundfläche des Körpers fällt, das Gewicht Q $=$ GD winkelrecht auf AB nach GF und parallel mit AB nach GE zerlegen. Nun ist der Winkel DGF $=$ ABC

$= \alpha$, daher der vom Gewichte Q auf AB entstehende Normaldruck, welcher von der Ebene aufgehoben wird, oder GF $= GD \cdot \cos\alpha = Q \cdot \cos\alpha$, und die Kraft, mit welcher der Körper vermöge seines Gewichts Q längs der schiefen Ebene nach der Richtung GE herabzugleiten strebt, sein Herabgleitungstrieb oder sein **relatives Gewicht** GE $= FD = GD \cdot \sin\alpha = Q \cdot \sin\alpha$.

Soll nun der Körper in Ruhe bleiben, so muß P den Körper eben so stark nach der Richtung BA aufwärts zu bewegen streben, als solches vom Gewichte Q nach der Richtung AB abwärts geschieht. Man zerlege daher die Kraft $P = GJ$ nach GL winkelrecht mit AB, und nach GK mit AB parallel, oder dem relativen Gewicht von Q gerade entgegengesetzt, alsdann ist der Winkel $KGJ = JGM - KGM = \beta - \alpha$, also $JGL = KGL - KGJ = 90° - (\beta - \alpha)$. Daher $\cos JGL = \sin(\beta - \alpha)$, und $\cos KGJ = \cos(\beta - \alpha)$, und man erhält den Normaldruck gegen AB, welcher von der Kraft P entsteht oder $GL = GJ \cdot \cos JGL = P \cdot \sin(\beta - \alpha)$, und die in paralleler Richtung mit BA entstehende Kraft $GK = GJ \cdot \cos KGJ = P \cdot \cos(\beta - \alpha)$.

Damit der Körper in Ruhe bleibe, muß diese letztere Kraft $P \cdot \cos(\beta - \alpha)$ dem relativen Gewicht $Q \cdot \sin\alpha$ gleich seyn, also $P \cdot \cos(\beta - \alpha) = Q \cdot \sin\alpha$. Daher findet man

1) $P = \frac{Q \cdot \sin\alpha}{\cos(\beta - \alpha)}$

2) $Q = \frac{P \cdot \cos(\beta - \alpha)}{\sin\alpha}$.

Nennt man den von beyden Kräften Q und P entstehenden Normaldruck $= N$, so ist der eigentliche Normaldruck auf die Ebene

3) $N = Q \cdot \cos\alpha - P \cdot \sin(\beta - \alpha)$.

Wird aus 1) für P sein Werth gesetzt: so ist

4) $N = Q[\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \text{tang}(\beta-\alpha)]$,

oder, wenn in 3) statt Q sein Werth aus 2) gesetzt wird,

5) $N = P[\cos(\beta-\alpha) \cdot \text{cotg}\,\alpha - \sin(\beta-\alpha)]$.

Zusatz I. Wirkt die Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene parallel, so ist $\beta = \alpha$, also

1) $P = Q \cdot \sin\alpha$ und

2) $N = Q \cdot \cos\alpha = P \cdot \text{cotg}\,\alpha$.

Weil $\sin\alpha = \frac{AC}{AB}$, so verhält sich $P : Q = AC : AB$; d. h. wenn die Richtung der Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene parallel wirkt, so verhält sich die Kraft P zur Last Q wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Zusatz II. Wäre die Richtung der Kraft P horizontal, also mit der Grundlinie der schiefen Ebene parallel, so ist $\beta = 0$. Daher

1) $P = Q \cdot \text{tang}\,\alpha$, und nach §. 42. 4).

2) $N = Q[\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \text{tang}\,\alpha] = \frac{Q}{\cos\alpha}(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2) = \frac{Q}{\cos\alpha}$ für $\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2 = r^2 = 1$.

Weil $\text{tang}\,\alpha = \frac{AC}{BC}$, so verhält sich $P : Q = AC : BC$; d. h. wenn die Kraft P mit der Grundlinie der schiefen Ebene parallel wirkt, so verhält sich die Kraft P zur Last Q wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Grundlinie.

Zusatz III. Ist die Richtung der Kraft P mit der Länge der schiefen Ebene parallel, und die Kraft P legt den Weg AB [Fig. 35.] zurück, so wird die Last Q in derselben Zeit um die Höhe AC gehoben; und weil ohne Rücksicht auf Reibung $P : Q = AC : AB$ [Zus. I.], so verhalten sich auch hier wie §. 19. Zus. II. die Kräfte umgekehrt wie ihre in gleicher Zeit zurückgelegten Wege.

Beyspiel. An einem zweymännschen Haspel, welcher über einem Schachte steht, dessen Tonnlage = dem Winkel CHG [Fig. 36.] $= \alpha = 72°$ ist, sey die Höhe des Haspelhorns CD $= CD' = a = 18$ Zoll, der Durchmesser des Rundbaums $AB = D = 8$ Zoll, die Seilesstärke $\delta = \frac{3}{4}$ Zoll, folglich die Lastentfernung $= b = \frac{D+\delta}{2} = 4{,}375$ Zoll; ferner sey

der Halbmesser der Zapfen am Rundbaum = r = 0,3 Zoll, das Gewicht des armirten Rundbaums = G = 100 Pf., das Gewicht eines leeren Kübels = k = 40 Pf., das Gewicht der Fördermasse = M = 120 Pf.; wie groß ist die für das Gleichgewicht zur Ueberwältigung der eigentlichen Last und der Bewegungshindernisse an dem Kraftpunct D oder D' erforderliche Kraft P?

Auflösung. Außer der eigentlichen zu fördernden Last und den in §. 40. Beyspiel I. angegebnen Bewegungshindernissen kommt hier noch ein Hinderniß vor, nämlich die Friction der Kübel auf dem Tonnfache. Angenommen, daß die Seile, woran die Kübel angeschlagen sind, mit der Tonnlage des Schachtes parallel gehen, so hat man hier zuvörderst zu bestimmen das relative Gewicht des vollen Kübels nebst der Friction desselben auf dem Tonnfache $= (M+k) \sin\alpha + \mu (M+k) \cos\alpha$ [§. 42. Zus. I. 1) 2) und §. 31. Zus. IV.], wo hier der Hindernißcoefficient $\mu = \frac{1}{2}$ anzusetzen ist. Diesem vollen Kübel kommt aber nun der hineingehende leere Kübel mit einer statischen Kraft $= k \cdot \sin\alpha - \mu \cdot k \cdot \cos\alpha$ zu Hilfe, daher der wegen der relativen Last und Friction auf dem Tonnfache entstehende Widerstand am Rundbaum oder am Lastpuncte

$$1)\ W = [(M+k)\sin\alpha + \mu(M+k)\cos\alpha] - [k \cdot \sin\alpha - \mu \cdot k \cos\alpha]$$
$$= M \cdot \sin\alpha + \mu\,(M+2k)\cos\alpha, \text{ also}$$
$$= 120 \cdot \sin 72^\circ + \tfrac{1}{2}\,(120+80)\cos 72^\circ = 114{,}2 + 30{,}9$$
$$= 145{,}1 \text{ Pf.}$$

Der zweyte Widerstand ist nun die Seilesbiegung am Rundbaum, und diese ist

$$2)\ W' = 0{,}75 \cdot \frac{\delta}{D} \cdot (W + k \cdot \sin\alpha) =$$
$$= 0{,}75 \cdot \frac{3}{4 \cdot 8}\,(145{,}1 + 40 \cdot \sin 72^\circ) = 12{,}8 \text{ Pf.}$$

Die Zapfenfriction entsteht aus den Widerständen W, W' nebst den relativen Gewichten der beyden leeren Kübel, welche Widerstände sämmtlich nach der Richtung der Tonnlage CH wirken; sodann wird die Zapfenfriction noch vermehrt durch den senkrechten Druck des armirten Rundbaums nach der verticalen Richtung CG. Der Richtungswinkel dieser Seitenkräfte ist GCH $= 90^\circ - \alpha = \varepsilon$, wo also $\cos\varepsilon = \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$ ist.

Da nun der Druck nach der Richtung CH $=$ CF $= W + W' + 2k \cdot \sin\alpha$, und der nach CG $=$ CE $=$ G ist: so findet sich der mittlere Druck nach CR $= R = \sqrt{[(W+W'+2k\cdot\sin\alpha)^2 + 2\,(W+W'+2k\cdot\sin\alpha)\,G\cdot\sin\alpha + G^2]}$ [§. 16. Zus. II. 6)] $= \sqrt{[(145{,}1+12{,}8+80\cdot\sin 72^\circ)^2 + 2\,(145{,}1+12{,}8+80\cdot\sin 72^\circ)\cdot 100\cdot\sin 72^\circ + 100^2]} = 234$ Pf. Demnach die auf den Lastpunct reducirte Zapfenfriction $=$

$$3)\ W'' = \frac{r}{b}\cdot\varphi\cdot R = \frac{0{,}3}{4{,}375}\cdot 0{,}3\cdot 234$$
$$= 4{,}8 \text{ Pf.}$$

Es sind demnach die an dem Rundbaum befindlichen sämmtlichen Widerstände oder

$$4)\ Q = W + W + W' = 145{,}1 + 12{,}8 + 4{,}8$$
$$= 162{,}7 \text{ Pf., und daher}$$

die für das Gleichgewicht an einem Kraftpunct D oder D' erforderliche Kraft

$$5)\ P = \frac{b}{a}\cdot Q = \frac{4{,}375}{18}\cdot 162{,}7 = 39{,}5 \text{ Pf.,}$$

wofür man 40 Pf. setzen kann.

Wären also zwey Arbeiter angestellt, so hätte jeder an seiner Spille in D oder D' mit seinen Händen einen Druck von $\frac{1}{2}P = 20$ Pf. auszuüben.

Anmerkung I. Die hier aufgestellte Berechnung eines Haspels passt, wie schon erwähnt, auch für solche, welche über seigern Schächten stehen, weil man nur dann für $\alpha = 90^\circ$ zu setzen hat [§. 40. Beyspiel I.].

Anmerkung II. Auf eine ähnliche Weise und mit Hilfe §. 40. Beyspiel II. lässt sich nun auch die statische Kraft für Pferde und Wassergöpel berechnen, der Treibeschacht mag seiger oder tonnlägig seyn.

Weil bey Göpeln das Fördergefäß in einer sogenannten Tonne, einem hohlen parallelepipedischen Körper, besteht, welche an den Außenseiten mit gleich grosen kleinen Rädern versehen ist, mittelst welchen sie auf der Tonnenleitung fortgetrieben wird: so hat man hier in Hinsicht der Friction der Tonne auf der Tonnenleitung folgende Abänderung nur nöthig. Heißt nämlich das Gewicht der Tonne $=$ T, die eingefüllte Masse $=$ M, der Halbmesser so eines kleinen Rades oder einer Walze an der Tonne $= \mathfrak{R}$, der Halbmesser der Zapfen oder Axen der Räder $= \varrho$: so ist die Friction einer vollen Tonne auf dem Tonnenfach, auf den Umfang der Walze reducirt, $= \mu\cdot\frac{\varrho}{\mathfrak{R}}\,(M+T)\cos\alpha$, wo man für $\mu = \frac{1}{2}$ setzen kann.

Anmerkung III. Bey der Anlegung eines Haspels, welcher durch Menschen bewegt wird, kommt es vorzüglich auf Folgendes an:

1) Nennt man die Länge des Arbeiters (man nimmt zur Haspelförderung gern untersetzte und starke Leute von 70 Zoll Länge) $= h$, so muß die senkrechte Entfernung der Axe des Rundbaums über der Standfläche des Arbeiters oder die Senkrechte CG (oder in Fig. 31. CH) $= \frac{3}{8} \cdot h$ betragen.

2) Die Axenlinie CH der Haspelstützen muß parallel mit der Tonnlage des Schachtes gerichtet seyn.

3) Die Höhe des Haspelhorns CD beträgt stets 18 Zoll oder $1\frac{1}{2}$ Fuß.

4) Beym zweymännischen Haspel müssen die Kraftpuncte D, D' in einem Durchmesser des Kurbelkreises liegen, und sind einander gerade entgegengesetzt. Die Halbmesser CD, CD' dürfen keinen Winkel machen, wie man zuweilen annimmt.

5) Beym dreymännschen Haspel, wo an dem einen Ende des Rundbaums ein doppeltes Haspelhorn angebracht wird, müssen die drey Kraftpuncte einen gleichseitigen Triangel in einem Kreise bilden, dessen Halbmesser 18 Zoll beträgt.

Viermännsche Haspel sind von keinem Nutzen.

Anmerkung IV. Beym Pferdegöpel nimmt man als das beste Verhältniß des Halbmessers des Korbes zur mechanischen Schwengellänge das $= 4:17$ an.

Die mechanische Schwengellänge nimmt man bey den neuern Göpeln nicht unter 24 und nicht über 32 Fuß an.

Bey Wassergöpeln ist die Höhe des Wasserrades von dem Gefälle abhängig, jedoch nimmt man den Durchmesser der Welle oder des Korbes gewöhnlich 4 bis 5 Fuß an.

Anmerkung V. Wäre nach Zus. I. die Reibung der Last auf der schiefen Ebene gerade so groß, als das relative Gewicht der Last, nämlich $P = \varphi \cdot N$ [§. 51. Zus. IV.] oder $Q \cdot \sin\alpha = \varphi \cdot Q \cdot \cos\alpha$: so wäre $\sin\alpha = \varphi \cdot \cos\alpha$, und daher der Reibungscoefficient $\varphi = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tang\alpha$. In diesem Falle wird keine Kraft erfordert, den Körper in Ruhe zu erhalten. Der Winkel α heißt alsdann der Ruhewinkel. Mit Hilfe einer schiefen Ebene kann daher die Reibung der Körper sehr leicht gefunden werden; denn man darf nur den Winkel α so lange vergrößern, bis der Körper sich zu bewegen anfängt, so ist dieß der Ruhewinkel, welchen man auch den Reibungswinkel zu nennen pflegt.

Z. B. bey einem Neigungswinkel von $26\frac{1}{2}$ Grad mit dem Horizont bewegt sich ein Parallelepiped aus Fichtenholz auf einer dergleichen hölzernen schiefen Ebene, daher

ist der Reibungscoefficient zwischen Fichtenholz = tang 26°,30 = 0,4989 (für dem Halbmesser = 1), wofür man 0,5 setzen kann.

§. 43.

Erklärung. Ein Keil heißt ein dreyseitiges Prisma, dessen zwey Seitenflächen AE, DE [Fig. 37.] (Seiten des Keils), die einen spitzen Winkel ABD (Schärfe des Keils) machen, mit einer Kraft auf der dritten Seitenfläche AG (Rükken des Keils) zwischen Körpern getrieben werden, um solche dadurch aus einander zu treiben oder zu spalten.

Ein Keil heißt gleichseitig, wenn die Grundfläche des Prisma ein gleichschenklicher Triangel ABD ist, dergleichen allein hier angenommen werden soll.

Zusatz I. Die Grundfläche des Keils oder jeder parallel mit derselben, in dem Puncte seiner Wirkung, geführte Durchschnitt DBA [Fig. 38.], kann anstatt des Kils betrachtet werden, wo man seine gleichen Schenkel DB, AB die Seiten, seine Grundlinie DA den Rücken, den Winkel ABD die Schärfe, und die Normale BC, welche die Grundlinie halbirt [Geom. §. 131. Zus. II.], die Länge des Keils nennt.

Zusatz II. Man kann den gleichseitigen Keil als zwey congruente schiefe Ebenen betrachten, die mit ihren Grundflächen oder Längen zusammengefügt sind, so daß die halbe Kraft gegen den halben Widerstand auf jeder Seite wirke.

Anmerkung. Zu den Keilen gehören theils die Gewölbsteine, theils unsre Messer, Scheren, Meisel, Aexte, und überhaupt alle schneidende und eindringende Instrumente.

§. 44.

Aufgabe. Die Kraft P auf des gleichseitigen Keils Rücken AD [Fig. 38.] hält das Gleichgewicht mit dem Widerstande Q, welcher zu gleichen Theilen gegen die Sei-

ten des Keils in F und G nach Richtungen wirkt, die entweder mit dem Rücken parallel, oder auf den Seiten normal sind; man soll das Verhältniß dieser Kräfte finden.

Auflösung. 1) Wirkt der Widerstand in der Richtung FG [Fig. 38.] mit DA parallel, folglich normal auf CB, so bedeutet FK = GK den Widerstand zu beyden Seiten, welcher daher als eine Last angesehen werden kann, die auf die schiefe Ebene DBC in der Richtung FK drückt. Nun wirkt die Kraft in der Richtung CB, parallel mit der Grundlinie der schiefen Ebene, und in diesem Falle verhält sich die Kraft zur Last wie die Höhe zur Grundlinie der schiefen Ebene [§. 42. Zus. II.], folglich hier $\frac{1}{2}P : \frac{1}{2}Q$ oder $P : Q = FK : KB = DC : CB = \frac{AD}{2} : CB$, d. i. wie der halbe Rücken des Keils zur Länge.

2) Wirkt der Widerstand auf beyden Seiten normal in den Richtungen FE, GE, so daß beyde verlängerte Richtungen FH, GL in den gemeinschaftlichen Punct E der Länge des Keils sich schneiden, und $EH = EL = \frac{1}{2}Q$ die gleichen Widerstände zu beyden Seiten bedeuten: so wird aus beyden Widerständen ein mittlerer Widerstand hervorgehen, welchen die Diagonale EM des Rhombus LEHM vorstellt. Diesem mittlern Widerstand muß nun die Kraft P gerade entgegenwirken, und es muß daher $P = ME = 2\,NE$ seyn. Da nun $\triangle NEH \backsim \triangle BDC$, so ist $\frac{1}{2}P : \frac{1}{2}Q$ oder $P : Q = NE : EH = DC : DB = \frac{AD}{2} : DB$, d. i. wie der halbe Rücken des Keils zur Seite.

Zusatz. Nennt man $\frac{ABD}{2} = DBC = \alpha$, so ist $DC : CB = \tan\alpha : 1$, und $DC : DB = \sin\alpha : 1$. Daher für den ersten Fall $P : Q = \tan\alpha : 1$, also

$$1)\ P = Q \cdot \tan\alpha,$$

und mit Hinsicht auf Reibung, wenn μ den Hindernißcoefficienten bedeutet, nach §. 42. Zus. II.2).

$$2)\ P' = Q \cdot \tan\alpha + \frac{\mu \cdot Q}{\cos\alpha} = Q\left(\tan\alpha + \frac{\mu}{\cos\alpha}\right).$$

Für den zweyten Fall ist $P : Q = \sin\alpha : 1$, daher

$$3)\ P = Q \cdot \sin\alpha,$$

und weil es sich hier eben so wie §. 42. Zus. I.2) verhält, so ist mit Hinsicht auf Reibung

$$4)\ P' = Q \cdot \sin\alpha + \mu \cdot Q \cdot \cos\alpha = Q(\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha).$$

Anmerkung. Der erste Fall, oder das Verhältniß des Mersenni, findet Statt, wenn man bey Maschinen Körper an einander presst, wie z. B. in den Oehlmühlen zur Auspressung des Saamens geschieht, wo man sich gewöhnlich nur eines halben Keils bedient. Der zweyte Fall, oder das Verhältniß des Borelli, ist für Körper, die man mit dem Keile aus einander treibt, welches zwar bey Maschinen nicht vorkommt, aber doch z. B. beym Zerspalten des Holzes von oben nieder, oder überhaupt bey allen Einhieben mittelst der Axt nach der Länge der Fiebern. Beyde Fälle erfordern viele verwickelte Untersuchungen, wenn man Genauigkeit verlangt.

§. 45.

Erklärung. Wird ein rechtwinklicher Triangel ACB [Fig. 39.] um die Oberfläche eines geraden Cylinders gelegt, wie ACb, daß ein Theil der Grundlinie CB den Bogen Cb im Umkreise der cylindrischen Grundfläche deckt, die Höhe CA in des Cylinders Seitenlinie CD fällt, und die Hypothenuse AB sich in Ab krümmt: so beschreibt diese gekrümmte Linie Ab einen Schraubengang.

Der Cylinder heißt die Spindel, und der Kreis, wovon Cb ein Bogen ist, der Spindel Umring. Ist CB dem ganzen Umringe der Spindel gleich: so ist CA die Höhe eines Schraubenganges oder die Weite der Gänge.

Es entsteht aber, je nachdem man den Schraubengang Ab entweder auf der erhabnen oder auf der hohlen Seite der Cylinderfläche nimmt, die äußere und innere Schraube, d. i. die Schraubenspindel und die Schraubenmutter.

§. 46.

Aufgabe. Das Verhältniß der Kräfte an der Schraube für den Zustand des Gleichgewichts zu finden.

Auflösung. Liegt auf dem Schraubengange Ab [Fig. 39.] eine Last Q, die längs demselben zwar nicht herabsinken, aber wohl durch das Umdrehen der Schraubenspindel gehoben werden kann: so drückt sie in der verticalen Richtung Qq, indem die Kraft P die Spindel horizontal herumtreibt; da dann, wenn man eben so wie §. 42. Zus. II. schließen darf, die Kraft P der Last Q das Gleichgewicht hält, wenn $P:Q = AC:BC = AC:bC$, oder wenn CB den ganzen Umfange der Spindel gleich, folglich CA die Weite der Schraubengänge ist, die Kraft P zur Last Q sich verhält, wie die Weite der Gänge zur Peripherie der Spindel.

Zusatz I. Nennt man a den mittlern Halbmesser zwischen Schraubenmutter und Schraubenspindel [§. 45.], w die Weite der Schraubengänge: so ist der (mittlere) Umfang der Schraubenspindel $= 2a\pi$, und daher $P:Q = w:2a\pi$, also

$$1)\ P = \frac{w}{2a\pi} \cdot Q.$$

Da nun gewöhnlich beym Gebrauch der Schraube durch die Spindel ein Hebelsarm, dessen Länge, von der Axe der Spindel angerechnet, $= A$ sey, gesteckt, und an diesem Hebel eine Kraft P' angebracht wird: so muß im Zustand des Gleichgewichts $P' \cdot A = P \cdot a$ seyn. Dieß gibt $P' = \frac{a}{A} \cdot P = \frac{a}{A} \cdot \frac{w}{2a\pi} \cdot Q$ oder

$$2)\ P' = \frac{w}{2A\pi} \cdot Q.$$

Da ferner im rechtwinklichen Triangel ACB [Fig. 39.] sich verhält CB : CA = 1 : tang B, d. i. $2a\pi : w = 1 : \tang \alpha$, so findet man den Neigungswinkel der Schraubenlinie = $\tang \alpha = \frac{w}{2a\pi}$, und daher mittelst §. 42. Zus. II. 2) die Kraft P' mit Rücksicht auf Friction, wenn μ der Reibungscoefficient ist, $= \frac{w \cdot Q}{2A\pi} + \mu \cdot \frac{Q}{\cos \alpha} = Q\left(\frac{w \cdot a}{2a\pi \cdot A} + \frac{\mu}{\cos \alpha}\right)$ oder

$$3)\ P' = Q\left(\frac{a}{A} \cdot \tang \alpha + \frac{\mu}{\cos \alpha}\right).$$

Zusatz II. Soll auf einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel α ist, ein Körper ruhig liegen: so muß, wenn μ den Reibungscoefficienten bedeutet, $\mu = \tang \alpha$ seyn [§. 42. Anm. V.]. Da nun nach vorigem Zus. $\tang \alpha = \frac{w}{2a\pi}$: so muß, wenn die Schraube nicht zurückgehen soll, $\mu = \frac{w}{2a\pi}$, und die Einrichtung der Schraube oder $\frac{w}{a} = 2\pi \cdot \mu$ seyn. Z. B. es sey $\mu = \frac{1}{6}$, so ist $2\pi \cdot \mu = 2 \cdot 3{,}141 \cdot \frac{1}{6} = 1{,}047 = \frac{w}{a}$, d. h. wenn die Reibung dem sechsten Theil des Drucks gleich ist, so wird eine Schraube von der Last nicht zurückgedreht werden können, wenn auch die Weite der Schraubengänge etwas größer als der Halbmesser der Schraubenspindel ist.

Zusatz III. Wenn die Kraft P' den Weg $2A\pi$ zurücklegt, so wird die Last Q in derselben Zeit um die Höhe w gehoben; und weil ohne Rücksicht auf Reibung nach Zusatz I. 2) $P' : Q = w : 2A\pi$, so verhalten sich auch hier wie §. 19. Zus. II. die Kräfte umgekehrt wie ihre in gleicher Zeit zurückgelegten Wege.

Anmerkung I. Eine genaue Theorie muß eigentlich noch in Erwägung ziehen, daß bey der Schraube die Last nicht auf einer schiefen Ebene, so wie in §. 41. u. s. f., sondern auf einer krummen Fläche gehoben wird, und wobey manches Andere noch zu betrachten wäre.

Anmerkung II. Aus Zus. I. ergibt sich, daß die Schraube desto größere Gewalt äußere, je enger die Schraubengänge sind, und je dicker die Spindel ist.

Die Schraube ist von mannichfaltigem, oft unentbehrlichem Gebrauche, und dient Körper anzudrücken und zu befestigen, Lasten zu bewegen oder zu erheben; allemal aber ist von den beyden Stücken, der Spindel und der Mutter, das eine beweglich, das andere fest.

Eine besondre Anwendung macht man von der Schraube bey der Schraube ohne Ende, wovon noch etwas in folgendem Kapitel.

Anmerkung III. Die bisher betrachteten Veranstaltungen, wodurch sich auf die einfachste Weise mit Vortheil der Kraft, Lasten im Gleichgewicht erhalten oder auch bewegen lassen, werden, wenn man sie als immateriell annimmt, die einfachen Maschinen oder die mechanischen Potenzen genannt. Unter diesen sind nun die ursprünglichen der Hebel und die schiefe Ebene; die abgeleiteten aber, nämlich vom Hebel, die Rollen und Radwelle, von der schiefen Ebene, der Keil und die Schraube.

Sechstes Kapitel.

Von dem Räderwerke und dem Pochwerke.

§. 47.

Erklärung. Zwey oder mehrere Räder, welche sich an verschiednen Axen oder Wellen befinden, aber so mit einander in Verbindung stehen, daß durch die Umdrehung des einen Rades das andere ebenfalls bewegt wird, bilden ein Räderwerk. Die wechselseitige Umdrehung der Räder kann dadurch bewirkt werden, daß entweder um dieselben ein Seil ohne Ende gelegt wird, welche Räder dann Seilräder heißen; oder daß Erhöhungen des einen Rades in die Vertiefungen des andern eingreifen. Solche Erhöhungen, die man Zähne oder Kämme nennt, stehen am Stirn- oder Sternrade in der Richtung der Halbmesser; bey dem Kronen- oder Kammrade aber auf den Halbmessern winkelrecht.

Anmerkung. Stirn- und Kammräder dienen dazu, liegende und stehende Wellen mit einander zu verbinden, wie bey Wassermühlen, wo das Kammrad an der liegenden Welle des Wasserrades in den Trilling der stehenden Welle des Läufers eingreift.

§. 48.

Erklärung. Von zwey Rädern, die in einander greifen, heißt das kleinere das Getriebe, und insbesondere ein Trilling, wenn es aus zwey parallelen Scheiben besteht, die mit Stäben, den Triebstöcken, zusammengefügt sind. Sind die Triebstöcke nicht zwischen parallelen Scheiben eingesetzt, sondern in dem Umfange einer Welle ausgearbeitet, so entsteht ein Kumpf, dessen Zähne Stäbe, auch Stöcke oder Stecken heißen. Uebrigens sind unter den allgemeinen Namen Zähne die Zähne, Stöcke, Stäbe oder Kämme eines Rades begriffen.

Zusatz. Bey Maschinen, welche durch Zahn und Getriebe bewegt werden, hat man vorzüglich darauf zu sehen, daß

1) in gleichen Zeiten gleich große Bogen von dem Umfange eines jeden Rades fortgeschoben werden. Dieß muß aber von jedem noch so kleinen Bogen eben so, wie von jedem größern gelten;

2) die Kraft immer dieselbe und gleich bleibe, und daß

3) die Reibung möglichst vermindert werde.

Diese Bedingungen werden nach Gründen der höhern Geometrie nur dadurch erfüllt, wenn die Zähne der Stirn- und Kammräder nach krummen Linien, welche man Epicykloide und Cykloide nennt, geformt werden.

§. 49.

Aufgabe. Bey einem Räderwerke von drey Rädern A, B, C [Fig. 40.] ist am Umfange der Welle des letzten Rades C in H die Last Q angebracht, und am Umfange des ersten Rades A hält ihr die Kraft P das Gleichgewicht; man sucht das Verhältniß von P, Q, wenn die Halbmesser der Räder sowohl, als der Getriebe und der

Welle F des letzten Rades C gegeben, die Kraftrichtungen tangential sind, und dabey alle Nebenlast noch bey Seite gesetzt wird.

Auflösung. Man bezeichne die Halbmesser der Räder A, B, C durch R, R', R'', der Getriebe D, E nebst der Welle F des Rades C durch r, r', r'': so wird die Kraft P am Umfange des ersten Getriebes D in L gegen den Zahn des Rades B einen Druck $P' = \frac{R}{r} \cdot P$ verursachen [§. 40. Zus. I. 2)]. Dieser Druck P' pflanzt sich fort und bewirkt am Umfange des dritten Rades C einen Druck $P'' = \frac{R'}{r} \cdot P' = \frac{R \cdot R'}{r \cdot r'} \cdot P$, welcher mit der Last Q an der Welle F im Gleichgewicht seyn muß. Für diesen Fall ist $R'' \cdot P'' = r'' \cdot Q$, oder $\frac{R \cdot R' \cdot R''}{r \cdot r'} \cdot P = r'' \cdot Q$, oder $R \cdot R' \cdot R'' \cdot P = r \cdot r' \cdot r'' \cdot Q$, und daher

$P : Q = r \cdot r' \cdot r'' : R \cdot R' \cdot R''$. Hieraus folgt

1) $P = \frac{r \cdot r' \cdot r''}{R \cdot R' \cdot R''} \cdot Q$, und 2) $Q = \frac{R \cdot R' \cdot R''}{r \cdot r' \cdot r''} \cdot P$.

Zusatz I. Damit von einem verzahnten Rade und dem zugeordneten Getriebe gleich lange Bogen ihres Umfanges in gleicher Zeit fortgeschoben werden [§. 48. Zus.], so müssen diese Bogen auf gleichen Längen gleich viel Zähne haben; und so oft daher die Peripherie des Getriebes in der Peripherie des zugehörigen Rades enthalten ist, so oft muß auch die Anzahl der Zähne oder Stöcke des Getriebes in der Anzahl Zähne oder Kämme des Rades enthalten seyn. Die Anzahl der Zähne zweyer in einander eingreifender Räder verhält sich dann wie die Peripherien oder Halbmesser dieser Räder. Sind daher n, n' die Anzahl der Zähne oder Stöcke der Getriebe D, E [Fig. 40.], N, N' die Anzahl der Zähne der diesen Getrieben zugeordneten Räder B, C: so ist überhaupt $\frac{r \cdot r' \cdot r''}{R \cdot R' \cdot R''} = \frac{n \cdot n' \cdot r''}{R \cdot N, N'}$, und daher

1) $P = \frac{r''}{R} \cdot \frac{n \cdot n'}{N \cdot N'} \cdot Q$, 2) $Q = \frac{R}{r''} \cdot \frac{N \cdot N'}{n \cdot n'} \cdot P$.

Zusatz II. Weil mit dem Eingreifen eines verzahnten Rades in dem zugeordneten Getriebe oder Trilling Reibung zwischen Zahn und den Triebstöcken (Stöcken) eintritt: so multiplicirt Belidor dieserhalb die erforderliche Kraft noch für jeden Trilling mit $\frac{12}{11}$, also bey zwey Trillingen mit $(\frac{12}{11})^2$, welches auch die meisten Schriftsteller so beybehalten haben. Um aber die hier gefundnen Ausdrücke den Erscheinungen, welche beym Räderwerk (oder beym Vorgelege) eintreten, angemessener zu machen, und zugleich auf die Verschiedenheit der Vorgelege einige Rücksicht zu nehmen: so setzt Herr Prof. Langsdorf wegen der Ueberwindung der Reibung

1) $P = \frac{r''}{R} \cdot \frac{n \cdot n'}{(N-1) \cdot (N'-1)} \cdot Q$, und

2) $Q = \frac{R}{r''} \cdot \frac{(N-1) \cdot (N'-1)}{n \cdot n'} \cdot P$. [s. neue Erweiterungen der mechanischen Wissenschaften rc. von K. Ch. Langsdorf, Mannheim und Heidelberg, 1816. 8. S. 104. rc.]

Beyspiel. Es sey [Fig. 40.] das Rad A eine Kurbel, deren Höhe R = 18 Zoll beträgt; die Getriebe D, E haben jedes 6 Stöcke, das Rad B habe 24, das Rad C habe 30 Zähne, und der Halbmesser der Welle F sey r'' = 4 Zoll; es soll mittelst dieser Maschine eine Last oder ein Widerstand von 300 Pf. überwältigt werden, wie groß ist daher die statische Kraft mit Hinsicht auf Friction der Zähne?

Hier ist $n = n' = 6$, $N = 24$, $N' = 30$, also $N - 1 = 23$, $N' - 1 = 29$, und $Q = 300$; daher

$$P = \frac{4}{18} \cdot \frac{6 \cdot 6}{23 \cdot 29} \cdot 300 = 3{,}59 \text{ Pf.}$$

Ohne Rücksicht auf Friction wäre $P = \frac{4 \cdot 6 \cdot 6}{18 \cdot 24 \cdot 30} \cdot 300 = 3{,}33$ Pf.

Zusatz III. Nach §. 40. Zus. II. verhält sich [Fig. 40.].

der Weg der Kraft P : Weg der Kraft P' = R : r
" " " " P' : " " " P'' = R' : r'
" " " " P'' : " " " Q = R'' : r''

also der Weg der Kraft P : Weg der Kraft Q = $R \cdot R' \cdot R'' : r \cdot r' \cdot r''$.
aber die Kraft Q : Kraft P = $R \cdot R' \cdot R'' : r \cdot r' \cdot r''$.

Folglich die Kraft Q : Kraft P = Weg der Kraft P : Weg der Kraft Q, und es verhalten sich auch beym Räderwerke die Kräfte umgekehrt, wie die Wege, die sie in gleicher Zeit zurücklegen.

Zusatz IV. Wird das Rad, an dessen Welle die Last angebracht ist, von vorgelegten Getrieben in Umgang gesetzt, oder greifen die Getriebe D, E in die Räder B, C [Fig. 40.]: so gewinnt man an Kraft. Wird aber das Rad oder die Welle, woran die Last Q angebracht ist, von vorgelegten Rädern in Bewegung gesetzt, oder greifen die Räder A, B in die Getriebe E, F: so gewinnt man an Geschwindigkeit. Ersterer Fall findet bey Hebezeugen, letztrer bey Mühlen Statt.

Zusatz V. Ist das Verhältniß der Kräfte $\frac{P}{Q}$ etwa $= \frac{60}{315}$ gegeben, um ein Räderwerk anzulegen: so zerfälle man den Bruch $\frac{P}{Q} = \frac{60}{315}$ in so viel Bruchfactoren, als Radwellen seyn sollen, hier [Fig. 40.] etwa $= \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{5 \cdot 7 \cdot 9}$, so geben diese einzelnen Bruchfactoren die Verhältnisse zwischen Welle oder Getriebe und zugehörigem Rad. Eben so verfahre man, wenn ein Räderwerk angelegt werden soll, wozu das Verhältniß der Umlaufszahlen gegeben ist.

Anmerkung. Bey dieser Betrachtung hier wurde eine Radwelle mit zwey vorgelegten Radwellen, oder ein zweyfaches Vorgelege betrachtet. Man sieht nun leicht ein, wie man auch bey einem dreyfachen Vorgelege, welches jedoch bey großen Maschinen höchst selten vorkommt und wo möglich vermieden werden muß, verfahren müßte.

§. 50.

Erklärung. Unter dem Halbmesser des Stirnrades versteht man den Halbmesser CA [Tab. IV. Fig. 41.] = CE vom Mittelpuncte C bis zur Brust oder Stärke BD des Zahns BFD. Die zum Halbmesser CA gehörige Kreislinie ZX heißt der Theilkreis oder Theilriß, weil auf demselben die Zähne ein- oder abgetheilt werden. Die Stärke QN eines Zahns nebst dessen Zwischenweite NB zusammengenommen, d. i. der Bogen QB = PE, oder der Bogen des Theilrisses von der Mitte eines Zahns bis zur Mitte des nächsten, wird die Theilung genannt. Berührt der Stock A bey B den Zahn BFD, so heißt der Abstand dieses Stocks

A vom nächsten Zahn QRN oder der Bogen NM der Spielraum zwischen Zahn und Stock, welchen man aber so klein als möglich annehmen muß.

Eben so ist GA der Halbmesser des Getriebes, welcher jedesmal vom Mittelpuncte G bis zum Mittelpuncte des Stocks gerechnet wird. Die zu diesem Halbmesser gehörige Kreislinie VW heißt der Theilkreis oder Theilriß des Getriebes. Die Theilung oder der Bogen AO desselben ist der Theilung PE des Rades gleich.

Zusatz I. Die gerade Linie GAC, welche bey einem Rade und Getriebe durch ihre beyden Mittelpuncte G, C und ihrem Berührungspunct A beyder Theilkreise geht, nennt man die Mittelpunctslinie (Centrallinie). Wird nun ein Getriebe von einem Rade bewegt, so muß die erste Berührung zwischen Zahn und Stock dann erst erfolgen, wenn der Mittelpunct des Stocks in den Berührungspunct A beyder Theilkreise kommt, und nun dieser Punct A in die Centrallinie fällt. Wird aber das Rad vom Getriebe bewegt, so folgt umgekehrt, daß der Zahn den Stock dann erst verlassen muß, wenn der Mittelpunct des Stocks in die Centrallinie beyder Räder fällt.

Man kann nun leicht die Anordnung treffen, wenn die Zähne nicht unnöthig lang werden sollen, daß immer nur ein Zahn mit einem Stock in Berührung kommt, und daß im vorigen ersten Fall der nächstfolgende Zahn den Stock verlassen, und im zweyten der nächstfolgende Stock den Zahn ergreifen muß, wenn Rad und Getriebe gleiche Theilung AL = AO = PE = 2AP = 2AE, und die Zähne die erforderliche Gestalt und Länge haben.

Zusatz II. Um zu übersehen, wie diejenigen Größen, welche bey der Anordnung eines Räderwerks vorkommen können, von einander abhängen, so sey

R = AC der Halbmesser vom Theilriß des Rades,
r = AG der Halbmesser vom Theilriß des Getriebes,
t = AO = PE, die Theilung, [Fig. 41.]
N = die Anzahl der Zähne des Rades;
n = die Anzahl der Stöcke des Getriebes, welche jedoch des ununterbrochenen Eingreifens wegen nicht unter 5

seyn darf, wenn die Bewegung gleichförmig und nicht stoßweise erfolgen soll;

α = PCE der Mittelpunctswinkel für die Theilung PE des Rades, in Graden ausgedrückt;

β = AGL der Mittelpunctswinkel für die Theilung AL = AO des Getriebes;

A = der Bogen für den Halbmesser = 1, welcher dem Winkel α entspricht, und eben so

B = der zum Winkel β gehörige Bogen für den Halbmesser = 1.

Nun verhält sich $\alpha : 360° = A : 2\pi$. Es ist daher

1) $A = \frac{\pi\alpha}{180}$, und eben so $B = \frac{\pi\beta}{180}$.

Ferner verhält sich $1 : A = R : t$, daher ist

2) $t = R \cdot A = r \cdot B$.

Aus 1) und 2) folgt ferner

3) $t = \frac{\pi\alpha R}{180} = \frac{\pi\beta r}{180}$, und hieraus

4) $\alpha R = \beta r$.

Der Umfang des Theilrisses des Rades ist $= 2\pi R$, daher

5) $N \cdot t = 2\pi R$, und $n \cdot t = 2\pi r$, woraus folgt.

6) $n \cdot R = N \cdot r$.

Aus diesen sechs Gleichungen erhält man folgende Zusammenstellung.

$$1)\ R = \frac{\beta r}{\alpha} = \frac{N \cdot r}{n} = \frac{N \cdot t}{2\pi} = \frac{180 \cdot t}{\pi\alpha}$$

$$2)\ r = \frac{\alpha R}{\beta} = \frac{n \cdot R}{N} = \frac{nt}{2\pi} = \frac{180 \cdot t}{\pi\beta}$$

$$3)\ t = \frac{\pi\alpha R}{180} = \frac{2\pi R}{N} = R \cdot A = \frac{N \cdot r \cdot A}{n}$$

$$= \frac{\pi\beta r}{180} = \frac{2\pi r}{n} = r \cdot B = \frac{n \cdot R \cdot B}{N}$$

$$4)\ N = \frac{360}{\alpha} = \frac{360 \cdot R}{r\beta} = \frac{nR}{r} = \frac{2\pi R}{t}$$

$$5)\ n = \frac{360}{\beta} = \frac{360 \cdot r}{R\alpha} = \frac{N \cdot r}{R} = \frac{2\pi r}{t}$$

$$6)\ \alpha = \frac{360}{N} = \frac{360 \cdot r}{nR} = \frac{r\beta}{R} = \frac{180 \cdot t}{\pi R}$$

$$7)\ \beta = \frac{360}{n} = \frac{360 \cdot R}{N \cdot r} = \frac{R\alpha}{r} = \frac{180 \cdot t}{\pi r}$$

$$8)\ A = \frac{\pi\alpha}{180} = \frac{2\pi}{N} = \frac{t}{R} = \frac{2\pi r}{nR}$$

$$9)\ B = \frac{\pi\beta}{180} = \frac{2\pi}{n} = \frac{t}{r} = \frac{2\pi R}{Nr}$$

10) die Sehne der Theilung ist
beym Getriebe $= 2r \cdot \sin\frac{\beta}{2}$ und
beym Rade $= 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ [Geom. §. 250.].

§. 51.

Aufgabe. Aus dem Halbmesser $AC = R$ [Fig. 41.] des Stirnrades, dem Halbmesser $GA = r$ des Getriebes, der halben Dicke eines Stockes $Lu = d$, und dem Winkel $AGL = \beta$, welcher am Mittelpuncte des Getriebes zur Theilung AL gehört, die Länge vom **Obertheile** des Zahns oder $up = l$ durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Nach §. 50. Zus. II. 10) ist die Sehne $LA = 2r \cdot \sin\frac{\beta}{2}$, also $Au = AL - Lu = 2r \cdot \sin\frac{\beta}{2} - d$. Es ist aber der Winkel $uAC = 180° - LAG = 90° + \frac{\beta}{2}$, daher $\cos uAC = \cos(90° + \frac{\beta}{2}) = \sin\frac{\beta}{2}$, und man erhält im Triangel uAC die Seite $Cu = \sqrt{}(AC^2 + Au^2 + 2AC \cdot Au \cdot \cos uAC)$ [Geom. §. 256. Zus. II.], oder $Cp + pu = R + l = \sqrt{}[R^2 + (2r \cdot \sin\frac{\beta}{2} - d)^2 + 2R(2r \cdot \sin\frac{\beta}{2} - d) \cdot \sin\frac{\beta}{2}]$.

Hieraus findet man die Länge vom Obertheile des Zahns oder $pu = l = \sqrt{}[R^2 + (2r \cdot \sin\frac{\beta}{2} - d)^2 + 2R(2r \cdot \sin\frac{\beta}{2} - d) \cdot \sin\frac{\beta}{2}] - R$.

Beyspiel. Ein Rad habe 45 Zähne und das Getriebe 5 Stöcke, beyde Räder aber 4 Zoll Theilung, und die halbe Dicke des Stocks sey 1 Zoll: so ist nach §. 50. Zus. II. 1) und 2) der Halbmesser des Rades $R = \frac{N \cdot t}{2\pi} = \frac{45 \cdot 4}{6{,}282} = 28{,}65$ Zoll, und der Halbmesser des Getriebes $r = \frac{n \cdot t}{2\pi} = \frac{5 \cdot 4}{6{,}282} = 3{,}18$ Zoll.

Ferner ist §. 50. Zus. II. 7) $\beta = \frac{360^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{5}$ $= 72^\circ$, also $\frac{\beta}{2} = 36^\circ$, und $\sin\frac{\beta}{2} = 0{,}58778$. Daher $2r \cdot \sin\frac{\beta}{2} - d = 6{,}36 \cdot 0{,}58778 - 1 = 3{,}74 - 1 = 2{,}74$, und man findet daher die Länge $pu = l = \sqrt{(28{,}65^2 + 2{,}74^2 + 2 \cdot 28{,}65 \cdot 2{,}74 \cdot 0{,}58778)} - 28{,}65 = 30{,}34 - 28{,}65 = 1{,}69$ Zoll, oder reichlich $1\frac{5}{8}$ Zoll.

§. 51*.

Aufgabe. Aus der gegebenen Theilung, der Anzahl Zähne und Stöcke beym Rade und Getriebe, die Zähne und Stöcke anzuordnen und eine Chablone (Lehre) für die Zähne zu verfertigen.

Auflösung. Die Theilung sey $= t$, die Zahl der Zähne $= N$, und die Zahl der Stöcke $= n$: so findet man hieraus nach §. 50. Zus. II. 1) und 2) den Halbmesser des Rades $R = \frac{N \cdot t}{2\pi}$, und den Halbmesser des Getriebes $r = \frac{n \cdot t}{2\pi}$. Weil die Stöcke sich mehr als die Zähne abnutzen, und auch länger als diese sind, so macht man sie gewöhnlich dicker als die Zähne. Ein Spielraum zwischen beyden wäre unnöthig, wenn alles höchst vollkommen gearbeitet werden könnte. In den meisten Fällen wird man den Spielraum MN [Fig. 41.] $= \frac{1}{48} \cdot t$ annehmen können. Soll nun die Dicke des Stocks der Hälfte der Theilung gleich seyn: so ist, wenn d den Halbmesser des Stocks bedeutet, $2d = \frac{1}{2} \cdot t = \frac{24}{48} \cdot t$, und es bleibt daher für die Stärke des Zahns $= \frac{23}{48} \cdot t$ auf dem Theilkreise übrig. Wäre z. B. die Theilung $= t = 4$ Zoll, so ist

die Dicke des Stocks MB = $\frac{1}{2} \cdot t$ = 2 Zoll.
der Spielraum NM = $\frac{1}{48} \cdot t = \frac{1}{12}$ Zoll.
die Stärke des Zahns BD = $\frac{23}{48} \cdot t = 1\frac{11}{12}$ Zoll.

Um nun die Chablone oder Lehre zu verfertigen, wornach sämmtliche Zähne gearbeitet werden können, ziehe man auf einem abgehobelten Brete eine Linie CG, trage von C bis A den Halbmesser des Rades, und von A bis G den Halbmesser des Getriebes. Aus C und G beschreibe man die Bogen der Theilrisse AX und AW, nehme den Bogen AO = A3 = der Theilung (hier 4 Zoll), ziehe die Sehne AO, und nehme Oo der halben Dicke des Stocks gleich: so wird ein Bogen on, durch den Durchschnittspunct o mit dem Halbmesser Co gezogen, die Länge des Zahns begrenzen. Nun theile man den Bogen AO in mehrere gleiche Theile Aα, $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, und in eben so viel gleiche Theile A, 1, 1, 2, 2, 3, werde der Bogen A3 getheilt (je mehr Theile, desto besser); alsdann ziehe man um C durch α, β, γ die Bogen aa', bb', cc', und aus C die Linien 1a', 2b', 3c', nehme $a\alpha = a'\alpha'$, $b\beta = b'\beta'$, $c\gamma = c'\gamma'$: so liegen die Puncte A, α', β', γ' in einer Epicykloide (wie die höhere Geometrie erweiset), und man kann die Epicykloide A$\alpha'\beta'\gamma'$ desto genauer zeichnen, je mehr dergleichen Puncte gefunden worden sind. Nun nehme man die halbe Dicke des Stocks in den Zirkel, ziehe aus A und aus mehrern Puncten in der krummen Linie Aγ' Kreisbogen, und ziehe durch die äußersten Puncte derselben die krumme Linie Be bis an den Bogen no: so ist Be die Krümmung des Zahns über dem Theilrisse AX. Von B nach E, und von E nach D trage man die halbe Dicke des Zahns, ziehe durch C und E die Linie CF: so ist EF die Axe

vom Obertheile des Zahns. Macht man nun den Theil EDgF der andern Hälfte EBeF des Zahns gleich, und gibt dem Zahn über eFg eine geringe willkührliche Wölbung, so ist der Obertheil des Zahns fertig.

Um den Untertheil des Zahns zu bilden, nehme man EH etwas größer, als die halbe Dicke des Stocks, ziehe durch H um C den Bogen IK. und aus B und D nach C die Linien BI und DK: so ist BDKI der Untertheil des Zahns, und der Fuß IK desselben fällt mit der Stirne des Radkranzes zusammen.

Wird nach der so verzeichneten Gestalt des Zahns IBegDK eine Chablone von Holz oder Eisenblech ausgeschnitten, so lassen sich *alle* Zähne des Stirnrades darnach verreissen und anfertigen.

Zusatz I. Es kann sich der Fall ereignen, daß der Durchschnittspunct der Bogen Be, Dg unterhalb des Bogens on fällt. Alsdann muß man bey ungeänderten Halbmessern R, r entweder die Stärke BD des Zahns vergrößern, oder die Theilung AO = A3 verkleinern, weil sonst der vorgergehende Zahn seinen Stock früher verlässt, ehe der folgende Zahn seinen Stock ergriffen hat, wodurch nachtheilige Erschütterungen des Räderwerkes entstehen müssen. Bey übrigens gleichen Umständen kann man auch durch Vergrößerung des Halbmessers vom Getriebe und Rade für den Zahn die erforderliche Länge erhalten.

Wollte man mit weniger Weitläufigkeit und doch noch erträglich genau eine Chablone zum Zahn verfertigen, so kann man auch so verfahren. Auf dem Theilkreise des Getriebes trage man die Theilung von A nach L, ziehe AL, und nehme Lu = der halben Dicke des Stocks. Ferner sey auf dem Theilrisse des Rades AM = der halben Dicke des Stocks, MN = dem Spielraum, und NP = QP = der halben Stärke des Zahns. Durch u ziehe man um C den Bogen un, und durch C und P ziehe man SR. Ferner sey Rv = Ru; alsdann werde aus v und N mit der Weite uA der Durchschnittspunct y

und mit eben der Weite aus u und Q ein Durchschnittspunct auf der andern Seite gesucht, und aus diesen Durchschnittspuncten mit der Weite uA die Bogen vN, uQ gezogen: so erhält man hierdurch den Obertheil des Zahns Qu, vN. Der Untertheil und die Wölbung über R werden wie vorhin bestimmt.

Zusatz II. Um die Gestalt der Zähne eines Kammrads zu verzeichnen, so construirt man auf eine ähnliche Art, nur daß man statt des Theilrisses ZX durch den Berührungspunct A [Fig. 41.] eine normale Linie auf den Halbmesser CA zieht, und aus den Puncten 1, 2, 3, nachdem man zuvor die Theilung AO = A3 gemacht hat, normale Linien bis an die zugehörigen Bogen zieht.

Ueber die Construction der Zähne kann man auch des Hrn. Mechanicus Uhlhorn zu Oldenburg gekrönte Preisschrift, Hamburg bey Perthes, 1804. gr. 4. nachlesen. Ferner Handbuch der Statik fester Körper, von J. A. Eytelwein, 1. Bd., Berlin 1808. Lehrbuch der Mechanik fester Körper, von M. Magold, 2. Bd., Landshut 1813.

Anmerkung I. Nach Hr. Prof. Langsdorf Angabe beträgt die vollkommen hinreichende Dicke der hölzernen Triebstöcke, aus Hagebuchen, Weißdorn oder wilden Apfelbaumholz verfertiget, $1\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{4}$ Zoll, und daher die Theilung $2\frac{1}{2}$ bis $4\frac{1}{2}$ Zoll. Dabey darf die Länge eines Triebstocks zwischen beyden eingelegten Endstücken höchstens 4 Zoll betragen.

Anmerkung II. Nach Sturms Mühlenbaukunst und und Leupolds theatr. mach., Leipzig 1724. wird die Theilung in 7 gleiche Theile getheilt, wovon man auf die Stärke des Zahns 3 Theile, und auf die Dicke des Stocks $3\frac{2}{3}$ Theile, auf die Länge des Zahns über dem Theilriß 2 Theile und unter dem Theilriß $2\frac{1}{2}$ Theile rechnet.

Belidor in seiner Archit. Hydr. theilt die Theilung in 15 gleiche Theile, wovon er auf die Dicke des Stocks 8 Theile, und auf die Stärke des Zahns $6\frac{1}{2}$ Theile rechnet, so daß also $\frac{1}{2}$ Theil zum Spielraum übrig bleibt.

Anmerkung III. Ist der Halbmesser eines Rades gegeben, so findet man daraus den Halbmesser des Getriebes, wenn man den Halbmesser des Rades in so viele gleiche Theile theilt, als das Rad Zähne hat, und hiervon für den Halbmesser des Getriebes so viele Theile nimmt, als man demselben Stöcke geben will [Geom. §. 170. Zus. I.].

Anmerkung IV. Wird eine um ihre Axe mit wenigen Schraubengängen [§. 45.] versehene bewegliche Spindel DE

[Tab. III. Fig. 42.] mittelst einer Kurbel EFG ohne Fortrücken umgedreht, so daß anstatt der Schraubenmutter die Zähne des Rades einer Radwelle AB [§. 39.] zwischen die Schraubengänge HK greifen, und diese Zähne eben so, wie von der Schraubenmutter durch die Umdrehung der Spindel fortgeschoben werden: so heißt diese Vorrichtung eine **Schraube ohne Ende**. Diese Vorrichtung dient in diesem Falle als Hebezeug, nämlich um eine an der Welle des Rades in A angebrachte Last Q in die Höhe zu heben. Die Schraube bekommt dann gewöhnlich, so wie die Welle des Rades, eine horizontale, mithin das Rad eine verticale Lage.

Nennt man den Halbmesser des Rades CB = a, den Halbmesser der Welle mit der halben Seilesstärke, woran etwa die Last Q angebracht ist, nämlich CA = b, der Schraubengänge HK Weite von einander = w, die Höhe der Kurbel EFG, nämlich EF = A: so ist die an der Kurbel zum Gleichgewicht erforderliche Kraft ohne Hinsicht auf Seilesbiegung und Friction $= P = \frac{b}{a} \cdot \frac{w}{2\pi A} \cdot Q$ [§. 40. Zus. I. 1) und §. 46. Zus. I 2)].

Auch dient die Schraube ohne Ende dazu, um sehr sanfte und kleine Bewegungen an Meßinstrumenten und dergl. hervorzubringen.

Würde im vorigen Fall die Last Q auf einer schiefen Ebene in die Höhe gezogen, so finden bey der Berechnung der hierzu nöthigen Kraft beynahe alle in der Statik vorkommenden Aufgaben hier ihre Anwendung.

Anmerkung V. Wird eine gezähnte eiserne Stange AB [Fig. 43.], auf deren Gabel CD eine Last Q zur Stange parallel drückt, durch ein Getriebe E vermittelst der Kurbel FG in Bewegung gesetzt, mithin die auf der Gabel ruhende Last gehoben: so heißt diese Vorrichtung die **gemeine oder einfache Fuhrmannswinde**. Damit die Last Q in jeder beliebigen Höhe erhalten werden kann, wenn auch ein Arbeiter die Handhebe oder Spille der Kurbel verläßt, so ist noch an der Axe des Getriebes ein kleines sägeartig eingeschnittenes Rad KL (ein Strebrad) angebracht, in welches der Sperrhaken HI eingreift, und dadurch das Zurücktreten der Stange verhindert. Wenn sowohl die Last Q nach der Richtung der Stange BA, als die Kraft P auf die Handhebe der Kurbel tangential wirkt, und der Halbmesser des Getriebes E ist = b, die Höhe der Kurbel GF = a: so ist für den Zustand des Gleichgewichts, wenn man alle Hindernißlast bey Seite setzt, $P = \frac{b}{a} \cdot Q$ [§. 40. Zus. I. 1)].

§. 52.

Erklärung. Unter **Pochwerk** oder **Stampfmühle** versteht man ein oder mehrere

lothrechte, neben einander stehende, Säulen V, Z, XW [Tab. IV. Fig. 44.], bey welchen die Anordnung getroffen ist, daß sie vertical aufwärts gehoben werden können, und alsdann durch ihr eignes Gewicht wieder frey herunter fallen, um mittelst an ihren Enden W eingelegten Pocheisen oder sonst angebrachten Beschlägen andere untergelegte Körper zu zerstoßen. Eine einzelne solche Säule, wie XW, wird ein Pochstempel oder ein Stampfer genannt. Zur Bewegung eines Pochstempels oder Stampfers XW wird gewöhnlich an demselben ein Hebezapfen oder Däumling BF angebracht, welcher durch die Umdrehung einer Welle EPQ mittelst der Hebedaumen, Hebdäumlinge, Heblinge oder Heber EBDK bis zu einer gewissen Höhe BH gehoben wird, wo der Hebling den Däumling verläßt, und der Pochstempel oder Stampfer zwischen den Stempelleitungen, Ladenhölzern oder Scheidelatten U, U frey herunter fällt. Während der Zeit, in welcher der Stempel fällt, und weil man denselben, wenn er seinen tiefsten Stand erreicht hat, nicht augenblicklich wieder aufhebt, müßte die Kraft am Umfange der Welle vergeblich wirken; daher mit der Daumenwelle EPQ noch ein, zwey oder mehrere Pochstempel so verbunden sind, daß in dem Augenblick, in dem ein Hebling seinen Däumling verläßt, ein andrer Hebling den Däumling eines andern Stempels sogleich ergreift und so in die Höhe hebt, daß unter allen Umständen die auf den Hebling lothrecht drückende Last immer in gleicher Entfernung von der Umdrehungsaxe C der Welle und die hierzu erforderliche Kraft daher immer gleich groß bleibt.

Damit aber beym Heben des Stempels die Last immer in gleicher Entfernung von C bleibe, so muß der Stempel XW stets senkrecht auf den horizontalen Hebelarm CB wirken, und dieserhalb der Hebling EBDK nach einer eigenen krummen Linie geformt werden.

§. 53.

Aufgabe. Die krumme Linie anzugeben, nach welcher die Heblinge bey einem Pochwerk construirt werden müssen.

Auflösung. Es bezeichne CA [Fig. 45.] die Entfernung des ersten Angriffspunctes eines Heblings von dem Mittelpunct oder Drehungspunct C der Welle. Man ziehe mit dieser Entfernung CA eine Kreislinie, so heißt diese der Theilriß oder die mechanische Heblingswelle, und der Halbmesser CA des Theilrisses der mechanische Halbmesser der Heblingswelle. Auf dem Umfange dieses Kreises schneide man einen Bogen AB von der Länge ab, welche der Höhe, so hoch der Stempel gehoben werden soll, gleich ist, und ziehe an den Halbmesser CB des Endpuncts B dieses Bogens die Tangente BH [Geom. §. 134. Zus. II.], deren Länge BH der Länge des Bogens BA gleich gemacht wird. Man theile nun die Tangente BH sowohl, als den Bogen BA in gleich viele, aber in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, je mehr, desto besser, hier z. B. in achte; durch die Theilpuncte 1, 2, 3 ꝛc. des Bogens ziehe man die zugehörigen Halbmesser C, 1, C, 2, C, 3 ꝛc., und an den Endpuncten derselben die Tangenten 1, H', 2, H'', 3, H''' ꝛc., mache die Tangente 1, H' = I, H, die

Tangente 2, H'' = II, H, die Tangente 3, H''' = III, H rc., und ziehe durch die so bestimmten Puncte H, H', H'', H''' rc. A die krumme Linie HA, so ist geschehen, was man verlangte. Denn, wenn nun CAHBC den senkrechten Querschnitt der angreifenden Heblingsfläche bezeichnet: so folgt, daß, wenn die Halbmesser C, 7, C, 6 rc. nach und nach in die horizontale Lage CA gekommen sind, die Tangenten eine lothrechte Stellung erhalten haben werden, und der Pochstempel um die Länge der Tangente senkrecht aus seinem tiefsten Stand gehoben seyn wird, so daß also, wenn am Ende der Halbmesser CB in die horizontale Lage CA kömmt, die Last auf ihrem ganzen Wege immer senkrecht und in gleicher Entfernung von C gewirkt hat, und um die senkrechte Höhe BH = Bog. BA gehoben worden ist. Daher bleibt unter allen Umständen die Last und Kraft immer gleich groß.

Die krumme Linie AH erhält man am geschwindesten dadurch, wenn man einen Faden von der Länge des Bogens BA in B fest macht, und nun mit dem andern Ende A einen Bogen bis an die durch B gelegte Tangente BH zieht. Die hierdurch erhaltne krumme Linie AH nennt man eine **Kreisevolvente.**

§. 54.

Erklärung. Eine gewisse Anzahl neben einander stehender Pochstempel, zwischen zwey festen Säulen, den Pochsäulen, eingeschlossen, nennt man einen Satz. Bey den Ungarischen Pochwerken enthält ein Satz 5 Pochstempel, bey unsern Sächsischen Pochwerken hingegen nur 3 Pochstempel.

Die größte Höhe, auf welche ein Stempel gehoben wird, nennt man den Hub des Stempels, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft bey einem Umgange der Welle ein Pochstempel gehoben werden soll, die Hübigkeit der Welle. In Fig. 44. ist die Welle dreyhübig eingerichtet, weil von den drey Stempeln V, Z, XW jeder dreymal bey jedem Umgange der Welle gehoben werden und fallen soll.

§. 55.

Aufgabe. Zu Anlegung eines Pochwerks sind ein Satz Stempel, die Hübigkeit der Welle und der Hub gegeben: man soll hieraus den Halbmesser des Theilrisses oder den mechanischen Halbmesser der Welle [§. 53.] und die übrige Einrichtung des Pochwerks angeben.

Auflösung. Ehe diese Aufgabe gelöset werden kann, wird es nothwendig seyn, erst über den zweckmäsigen Gang bey einem Pochwerk, oder wie die Pochstempel eines Satzes von den Heblingen nach und nach ergriffen und gehoben werden müssen, etwas vorauszuschicken. Enthielte der Pochsatz nach unsrer Sächsischen Einrichtung 3 Stempel [§. 54.], und wäre von diesen 3 Stempeln der hintere oder dritte Stempel V [Fig. 44.] zuerst angehoben worden, so daß derselbe den ganzen Hub BH [§. 54.] = Bog. BA schon erreicht hätte, und sein Hebling PAHMN so eben den Daumen XH verlassen oder von selbigem abgleiten wollte: so muß der Däumling YS des zweyten oder mittleren Stempels Z von seinem Hebling LSRT schon längst ergriffen, und der Stempel Z auf die Höhe BS =

Bog. BL $= \frac{1}{2}$ Bog. BA $= \frac{1}{2} \cdot$ BH gehoben worden seyn. Will nun der hintere Stempel V so eben abfallen, und ist der mittlere Stempel Z schon auf die halbe Höhe BH gehoben, so muß nun der Hebling EBDK den Däumling FB des vordern oder ersten Stempels XW ergreifen; und wenn nun der zweyte oder mittlere Stempel seinen ganzen Hub erreicht hat, so muß wieder der vordere oder erste Stempel um den halben Hub gehoben worden seyn, und der hintere oder dritte Stempel muß, da so eben der mittlere Stempel abfällt, wieder von dem Hebling ergriffen werden. Hieraus ergibt sich denn, daß wenn in dem Pochsatze 3 Stempel sind, so werden immer $3 - 1 = 2$ Stempel in Thätigkeit seyn; und bestünde ein Satz aus 4 Stempeln, so müßten bey einem zweckmäsigen Gange immer $4 - 1 = 3$ Stempel; und bestünde ein Satz aus m Stempeln, so müßten daher $m - 1$ Stempel immer arbeiten.

Bedeutet also allgemein m die Anzahl Stempel eines Satzes, n die Hübigkeit der Welle [§. 54.], $h =$ BH den Hub, und $a =$ CB den mechanischen Halbmesser der Welle, so ist die Anzahl der sämmtlichen Heblinge für einem Satz $= m \cdot n$, und daher der Heblingswinkel, d. h. der Centriwinkel zwischen zwey nächsten Heblingen zweyer neben einander stehenden Stempel, d. i. der Winkel LCB $= \alpha = \frac{360^\circ}{m \cdot n}$. Da nun in einem Satze immer $m - 1$ Stempel arbeiten müssen: so müssen daher auch, wenn jeder Stempel auf die Höhe BH gehoben werden soll, in dem Bogen BA ($=$ Hub BH) $= h$ [§. 53.] des Theilrisses $= m - 1$ Heblinge stehen; und es muß daher der dem

Winkel α zugehörige Bogen BL $= B = \frac{h}{m-1}$ seyn. Der dem Bogen B zugehörige Halbmesser ist aber $= \frac{180° \cdot B}{\alpha \cdot \pi}$ [Geom. §. 231.]; oder, wenn man für B, α ihre Werthe substituirt: so erhält man allgemein den mechanischen Halbmesser der Welle oder CB =

1) $a = \frac{180° \cdot m \cdot n}{360° \cdot \pi} \cdot \frac{h}{m-1} = \frac{m \cdot n}{2\pi(m-1)} h = \mu$ nh, wo $\mu = \frac{m}{2\pi(m-1)}$ und $\pi = 3{,}141$.

Da nun für unsre Sächsischen Pochwerke $m = 3$ ist [§. 54.]: so ist bey uns

2) $a = \frac{3}{4\pi} \cdot nh = 0{,}23873 \cdot nh$, wofür man in der Ausübung $a = 0{,}24 \cdot n \cdot h$ setzen kann.

Man ziehe nun eine horizontale Linie CF von unbestimmter Länge, beschreibe aus C mit dem gefundnen Halbmesser CB = a den Theilriß BLAGB, trage aus B senkrecht auf FC den Hub BH = h, befestige in B am Umfange des Theilrisses einen dünnen Faden, dessen Länge = BH = h ist, lege denselben um den Theilriß, und beschreibe mit dem Endpuncte H des Fadens die Kreisevolvente AH [§. 53.]. Man bedient sich zu der Beschreibung der Kreisevolvente AH gewöhnlich einer gut abgedrehten kreisrunden Scheibe, deren Halbmesser CB = a ist.

Den Halbmesser der **physischen Welle** CN nehme man willkührlich kleiner, etwa 1 bis 2 Zoll, als den mechanischen an, und beschreibe um C mit CN den Umfang der physischen Welle PQEP.

Auf BH nehme man HM etwa $\frac{1}{4}$ BH oder $\frac{1}{5}$ BH, ziehe CM, welche den Umfang der physischen Welle in N schneidet, trage von N nach P am Umfange der Welle eine willkührliche Breite für den

Hebling, und verbinde die Puncte A, P durch einen willkührlichen Bogen: so ist NMHAP die Lehre oder Chablone für die Heblinge.

Sobald aus der Hubhöhe BH = h der mechanische Halbmesser = a gefunden ist, so lässt sich hieraus die Länge der Heblinge, nämlich IH = l, berechnen. Man nenne die Länge vom Mittelpuncte der Welle bis zum äußersten Ende des Daumens, nämlich CH = L: so ist im rechtwinklichen Triangel CBH die Länge $CH = L = \sqrt{(CB^2 + BH^2)} = \sqrt{(a^2 + h^2)} = \sqrt{(\mu^2 \cdot n^2 \cdot h^2 + h^2)} = h \cdot \sqrt{(\mu^2 n^2 + 1)}$ (nach 1). Daher die größte Länge des Heblings über dem Theilrisse, nämlich HI = CH — CI, oder l = L — a, d. i.

$$3)\ l = h \cdot \sqrt{(\mu^2 \cdot n^2 + 1)} - \mu n h = h\,[\sqrt{(\mu^2 n^2 + 1)} - \mu n].$$

Da nun bey unsern Sächsischen Pochwerken $\mu = 0{,}23873$, so ist also hier

$$4)\ l = h\,[\sqrt{(0{,}05699 \cdot n^2 + 1)} - 0{,}23873 \cdot n].$$

Beyspiel. Bey einem Pochwerk soll der Hub = h = 18 Zoll, die Hübigkeit = n = 4 seyn: so ist der mechanische Halbmesser der Welle nach 2) $a = 0{,}23873 \cdot n \cdot h = 0{,}23873 \cdot 4 \cdot 18 = 17{,}19$ Zoll.

Rechnet man nun den Abstand zwischen dem Angriffspunct A oder B [Fig. 44.] und der Welle 2 Zoll: so betrüge der Halbmesser der physischen Welle = 15,19 Zoll, und die Welle des Wasserrades müßte daher $2 \cdot 15{,}19 = 30{,}38$ oder beynahe $30\frac{1}{2}$ Zoll stark seyn.

Die größte Länge des Heblings über dem Theilrisse wäre nach 4) $= l = h\,[\sqrt{(0{,}05699 \cdot n^2 + 1)} - 0{,}23873 \cdot n] = 18 \cdot [\sqrt{(0{,}05699 \cdot 16 + 1)}$

$- 0,23873 \cdot 4] = 18 (1,381 - 0,954) = 18 \cdot$
$\cdot 0,427 = 7,686$ Zoll.

Zusatz I. Hat man ein Pochwerk von mehrern Sätzen, so bestimmt man die Größen a, l nur für einen Satz; aber in Hinsicht des Ganges oder der gehobnen Stempel ist zu bemerken, daß dann, wenn m die Anzahl der Stempel in einem Satze bedeutet, immer in jedem Satze $m - 1$ Stempel arbeiten müssen. Nennt man daher die Anzahl der Sätze $= N$, so muß bey einem Pochwerk für den zweckmäßigsten Gang die Anzahl der immerfort arbeitenden Stempel $= M = N \cdot (m - 1)$ seyn.

Hätte also z. B. ein Pochwerk 4 Sätze, und in jedem Satz 3 Stempel: so wäre $N = 4$, $m = 3$, und es müßten daher bey diesem Pochwerk immerfort $= M = 4 (3 - 1) = 4 \cdot 2 = 8$ Stempel in Thätigkeit seyn.

Zusatz II. Bey einem Pochwerk von mehrern Sätzen trifft man nun wegen eines gleichförmigen Ganges der Maschine die Einrichtung, daß in den einzelnen Sätzen die Stempel nicht auf gleiche Weise von den Heblingen ergriffen und auch wieder verlassen werden, sondern es muß solches in gleichen Zwischenräumen geschehen. Daher werden die Heblinge über der Oberfläche der Welle gleichförmig vertheilt, und man verfährt hierbey auf folgende Weise: Hätte man z. B. zwey dreystempliche Sätze, und jeder Stempel sollte dreymal bey jedem Umgange der Welle gehoben werden: so hätte man für jeden Satz $= 3 \cdot 3 = 9$ Heblinge, und für zwey Sätze $= 2 \cdot 9 = 18$ Heblinge an der Welle nöthig. Um nun diese auf der Oberfläche der Welle gleichförmig zu vertheilen, so theile man an beyden Enden der Welle den Umfang derselben in 18 gleiche Theile, wie hier Fig. 46. die abgewickelte Oberfläche der Welle vorstellt; durch die zusammengehörigen Theilpuncte an beyden Enden der Welle 1, 1, 2, 2, 3, 3 rc. ziehe man gerade Linien, und durch diese Linien ziehe man wieder auf dem Umfange der Welle so viele die erstern rechtwinklich schneidende Linien I, II, III, I, II, III rc., welche so viele Theilrisse der Welle vorstellen, als das Pochwerk überhaupt Pochstempel in jedem Satz hat. Die Durchschnittspuncte dieser Linien unter einander geben nun auf der Oberfläche der Welle die Stellen 1, 2, 3, 4, 5 rc. an, wo die Zapfen der 18 Heblinge eingesetzt werden müssen.

Zusatz III. Bey unsern Pochwerken hat man bey der Anlegung derselben noch dieses Anhalten:

1) der Hub ist nie über 18 Zoll und nie unter 6 Zoll;
2) jeden Stempel lässt man nicht über 48mal, und nie unter 36mal in jeder Minute heben und fallen;
3) den Mittelpunct der Welle legt man nie unter 30 Zoll über die Pochsohle, und
4) die Länge eines Pochstempels beträgt 6 Ellen, seine Breite und Dicke ungefähr 6 bis 8 Zoll. Die Pochstempel fertiget man gewöhnlich aus Buchenholz, und daraus auch die Heblinge.

Zusatz IV. Nennt man das Gewicht eines armirten Pochstempels $= P$; so kann man bey einem Pochwerk die Friction zwischen Hebling und Däumling, so wie wegen etwaiger Seitenreibung des Stempels an den Ladenhölzern, auf $= \frac{1}{8} \cdot P$ anschlagen. Ist also die Anzahl der bey einem Pochwerk stets arbeitenden Stempel $= M$ [Zus. I.]: so ist die zu hebende Last wegen der Stempel mit Hinsicht auf Friction $= W = M \cdot P + \frac{1}{8} \cdot M \cdot P = \frac{9}{8} \cdot M \cdot P$.

Anmerkung. Bey der hier angegebnen Einrichtung, die Pochstempel mittelst Däumlinge vertical zu heben, hat man die Unbequemlichkeit, daß der Stempel nicht ganz in lothrechter Stellung gehoben werden kann, deshalb man auch sogenannte geschlitzte Stempel in Vorschlag gebracht hat, bey den man nämlich in der Gegend, wo der Hebling den Stempel ergreifen soll, aus dem Stempel inwendig Holz herausnimmt, damit der Hebling in den Stempel eingreifen kann. Allein dergleichen geschlitzte Stempel springen sehr leicht entzwey. Um daher den Stempel in lothrechter Stellung immerfort zu erhalten: so könnte man entweder zwey parallel neben einander stehende Heblinge oder auch geschlitzte Heblinge [Tab. III. Fig. 47.] anwenden, wo der Stempel XW zwischen den Heblingen oder dem Schlitz innen stände, und mittelst eines durch den Stempel gesteckten Querholzes A ergriffen und gehoben werden könnte.

II.

Erste Gründe der Hydrostatik.

§. 56.

Erklärung. Flüssige Körper sind, deren Theile so wenig Zusammenhang haben, daß sie sich mit der geringsten Kraft trennen und verschieben lassen, wobey jedoch die Theile wie die einer festen Masse, nämlich zusammenhängend, erscheinen.

Anmerkung. Hieraus folgt der wesentliche Unterschied flüssiger Körper von festen, nämlich

1) daß sich ein Theil der flüssigen Masse bewegen läßt, ohne daß das Ganze mit bewegt wird, wovon das Gegentheil bey den festen Körpern Statt findet.
2) daß flüssige Körper jede Gestalt des Gefäßes, in welche sie eingeschlossen werden, annehmen, ohne einen Raum darinnen leer zu lassen, welches feste Körper nicht thun.
3) daß die Schwere der obern Theile gegen die untern nicht, wie bey festen Körpern, blos vertical und nach unten, sondern auch seitwärts, nach oben und nach allen Richtungen hin, drückt.

§. 57.

Erklärung. Ein flüssiger Körper heißt hier eine unelastische oder tropfbare Masse,

wie das Wasser, die sich weder zusammendrücken läßt, noch von selbst ihre veränderte Form wieder herstellt, und deren kleinere Theile blos durch eigne Schwere die sphärische Gestalt annehmen.

Die Wissenschaft vom Gleichgewichte solcher Körper heißt die Hydrostatik, weil das Wasser unter den unelastischen Flüssigkeiten oder den verschiednen Arten tropfbarer Körper die gemeinste ist.

§. 58.

Grundsatz. **Wenn eine unelastische flüssige Masse in einer geraden prismatischen oder cylindrischen festen Röhre AD [Tab. IV. Fig. 48.] zwischen zwey Stempeln AB, CD eingeschlossen ist, und gleiche Kräfte diese Stempel einander entgegentreiben: so bleiben diese Kräfte im Gleichgewicht, und der Druck pflanzt sich durch die flüssige Masse nach allen Seiten, auch gegen die feste Röhre gleichförmig fort.**

Zusatz I. Wenn CD kein beweglicher Stempel, sondern ein fester Boden wäre, so leidet derselbe eben so viel Druck, als wenn er dem Druck des Stempels AB unmittelbar ausgesetzt wäre. Damit alles in Ruhe bliebe, müßte nun die feste Röhre gehalten werden, damit sie nicht weichen könnte.

Zusatz II. Ist die Röhre prismatisch, so leidet jeder Theil einer ihrer ebnen Seitenflächen, welcher der Grundfläche des Stempels gleich ist, ebenfalls so viel Druck, als wenn der Stempel unmittelbar dagegen preßte. Jeder größere oder kleinere Theil EF der festen Fläche der Röhre erleidet einen Druck P', der sich zum Druck P des Stempels gegen AB verhält, wie der Flächeninhalt von EF $= W'$ zur Grundfläche des Stempels AB $= W$, oder $P : P' = W : W'$; daher der Druck auf den Theil EF der Seitenfläche $= P' = \frac{W'}{W} \cdot P$. Dasselbe gilt auch von den cylindrischen Röhren.

Zusatz III. Sind zwey gerade Röhren AE, EC [Fig. 49.] von ungleicher Weite bey E so zusammengefügt, daß ihre Axen in einerley gerade Linie fallen, und die ungleich großen Stempel AB, CD werden gegen einander gepresst: so kann nur alsdann ein Gleichgewicht Statt finden, wenn sich der Druck P gegen AB zum Druck P' gegen CD wie die Fläche AB = W zur Fläche CD = W', oder sich auch P : P' = W : W' verhält.

Zusatz IV. Würde die Röhre fest gehalten, und wäre statt des Stempels bey CD [Fig. 49.] ein fester Boden, wenn die Fläche AB einen Druck = P ausgesetzt ist, so litte nach vorigem Zusatz der Boden CD einen Druck $= P' = \frac{W'}{W} \cdot P$.

Zusatz V. Die vorigen Zusätze gelten in allen Fällen, wenn eine nicht schwere flüssige Masse in einem festen Gefäße, von welcher Figur man will, eingeschlossen ist, und wo von außen her an einer Stelle, wo das Gefäß eine Oeffnung hat, gegen die flüssige Masse ein Druck sich äußert.

§. 59.

Erfahrung. Wasser, welches in einem großen offnen Gefäße steht, ist nur dann in Ruhe, wenn die Oberfläche desselben eine solche Lage hat, daß die Richtung der Schwere [§. 10.] überall auf ihr senkrecht ist, oder alle Theile in einerley Niveau oder in einerley horizontalen Fläche sind.

§. 60.

Grundsatz. Wenn ein gerades lothrecht stehendes prismatisches oder cylindrisches Gefäß ABCD [Fig. 50.] mit schwerem Wasser angefüllt ist: so leidet der horizontale Boden BC einen Druck, der dem Gewicht der ganzen darüber stehenden Wassermasse gleich ist.

Zusatz I. Nennt man den körperlichen Inhalt der Wassersäule im Gefäße = V, die Grundfläche des Gefäßes = W,

Bayerische Staatsbibliothek München

die Höhe der Wassersäule AB = H, alles in Fußmaß ausgedrückt, ferner das Gewicht eines Cubikfusses Wasser = γ, und das Gewicht der Wassersäule CA = P in Pfunden: so ist

1) $P = V \cdot \gamma = W \cdot H \cdot \gamma$, und hieraus

2) $H = \frac{P}{W \cdot \gamma}$, die Höhe einer Wassersäule für eine gegebene Kraft P, welche auf einer gewissen Fläche W drückt.

Man nennt die Höhe H auch die **Druckhöhe** oder **Höhe der drückenden Wassersäule.**

Zusatz II. Haben die Größen P', W', H' mit den Größen P, W, H des vorigen Zusatzes gleiche Bedeutung, so ist $P' = W' \cdot H' \cdot \gamma$, und daher

1) $P : P' = W \cdot H : W' \cdot H$, und für $W = W'$

2) $P : P' = H : H'$, für $H = H'$ ist

3) $P : P' = W : W'$ [wie §. 58. Zus. II. und III.]. Ist $P = P'$, so ist auch

4) $W \cdot H = W' \cdot H'$, und für $W = W'$, auch $H = H'$.

Zusatz III. Stehen die Seitenwände eines Gefäßes nicht lothrecht auf dem horizontalen Boden DE des Gefäßes, wie Fig. 51. 52.: so hängt der Druck gegen den horizontalen Boden des Gefäßes immer nur von der Größe des Bodens DE und von der Höhe CD des Wasserstandes, nicht von der Menge des Wassers ab, und ist so groß, als das Gewicht einer Wassermasse, welche zwischen senkrechten Wänden über dem Boden DE stünde und den Wasserstand CD im Gefäße zur Höhe hätte. Denn was im Falle Fig. 51. an lastender Masse fehlt, oder wie in Fig. 52. zu viel ist, ersetzen [§. 56. Anm.] oder tragen die schiefen Seitenwände des Gefäßes durch einen Theil des senkrecht auf sie gerichteten Widerstandes gegen den Druck des Wassers, welcher in die Richtung der Schwere fällt.

Zusatz IV. Jede Fläche leidet von Wasser, in welchem sie sich befindet, nach Gründen der höhern Analysis, einen Druck, demjenigen gleich, welchen Wasser gegen eine horizontale Fläche, die so groß als die eingesetzte Fläche ist, bey einer Druckhöhe ausüben würde, die der senkrechten Tiefe des Schwerpunctes der Fläche unter der Oberfläche des Wassers gleich ist.

Die senkrechte Tiefe des Schwerpunctes einer Fläche unter der Oberfläche des Wassers, welche Oberfläche der Erfahrung nach eine horizontale Fläche ist [§. 59.], ist also die mittlere Druckhöhe für die ganze Fläche.

Bayerische Staatsbibliothek München

Wenn z. B. in einem Gerinne oder Canal der Schwerpunct eines Schutzbretes, dessen Flächeninhalt 12 Quadratfuß wäre, 3 Fuß unter der Oberfläche des Wassers läge, so wäre der Druck auf dieses Bret $= P = W \cdot H \cdot \gamma$ [Zus. I. 1)] $= 12 \cdot 3 \cdot 50 =$ 1800 Pf., wenn man hier $\gamma = 50$ Pf. setzt.

Zusatz V. Die vorstehenden Sätze finden auch ihre Anwendung bey der Berechnung des Drucks auf die Seitenwände der Röhrenleitungen, und der davon abhängenden Stärke der Röhren.

Füllt man z. B. eine lothrechte Röhre mit Wasser an, so leidet die Röhre an ihrer innern Wandfläche einen Druck, der jede zwey einander gegenüber liegende Puncte von einander zu entfernen strebt. Dieß Bestreben, das die Wand da, wo sie den schwächsten Zusammenhang hat, zum Bersten bringt, so bald dasselbe die Kraft des Zusammenhangs übertrifft, heißt die zerreissende Gewalt. Je höher nun das Wasser in der Röhre steht, desto größer ist diese zerreissende Gewalt des Wassers; und je dicker oder stärker die Röhre, desto mehr wirkt die zusammenhängende Kraft der Röhre der zerreissenden Gewalt entgegen; woraus denn folgt, daß die erforderliche Röhrenstärke mit der Wasserhöhe im genauesten Verhältniß steht.

Nennt man also die Röhrenstärken zweyer gleich weiten Röhren S, s, die Höhen des Wassers in denselben H, h: so ist bey gleich weiten Röhren

$$1)\ S : s = H : h.$$

Haben aber die Röhren verschiedne Weiten, so sieht man wieder leicht ein, daß je weiter die Röhre, desto stärker sie seyn muß, und daher die Röhrenstärke wieder im genauesten Verhältniß mit der Weite der Röhre steht. Bey gleich hohen Röhren muß also

$$2)\ S : s = D : d$$

seyn, wenn D, d die Weiten der Röhren bedeuten.

Sind demnach in zwey ungleich weiten Röhren die Weiten oder innern Durchmesser D, d, und die Wasserhöhen in selbigen H, h: so verhalten sich die zugehörigen Röhrenstärken S, s, also

$$3)\ S : s = H \cdot D : h \cdot d.$$ Und daher

$$4)\ S = s \cdot \frac{H \cdot D}{h \cdot d} = \frac{s}{h \cdot d} \cdot H \cdot D,$$

wo die Größen s, h, d für gewisse Materien, woraus Röhren gefertiget werden, aus Versuchen bekannt seyn müssen.

Versuch I. Nach Parent und Belidor leistet eine 12 Zoll weite bleyerne Röhre bey einer Wasserhöhe von 60 Fuß hinreichenden Widerstand, wenn ihre Wand 9 Linien dick ist. Dieß gibt für bleyerne Röhren

$$S = \frac{9}{60 \cdot 12} \cdot H \cdot D = \frac{H \cdot D}{80} \text{ Linien.}$$

Versuch II. Eine Röhre von sogenanntem Metalle, nämlich aus Kupfer, Zinn und Zink bestehend, leistete unter denselben Umständen hinlänglichen Widerstand, wenn ihre Dicke wenigstens 3 Linien betrug. Dieß gibt für dieses Metall

$$S = \frac{3}{60 \cdot 12} \cdot H \cdot D = \frac{H \cdot D}{240} \text{ Linien.}$$

Versuch III. Eine Röhre aus gegossenem Eisen hält bey einer Weite von 10 Zoll einen Druck von 240 Fuß Wasserhöhe aus, wenn ihre Dicke 1 Zoll ist. Daher hat man für gegossenes Eisen

$$S = \frac{12}{10 \cdot 240} \cdot H \cdot D = \frac{H \cdot D}{200} \text{ Linien.}$$

Versuch IV. Eine 14 Zoll weite Röhre aus Buchenholz, welche an beyden Enden mit eisernen Ringen beschlagen war und 3 Wochen im Wasser gelegen hatte, hielt bey einer Stärke von $2\frac{1}{2}$ Zoll einen Wasserdruck auch von 240 Fuß aus. Daher für dergleichen büchne Röhren

$$S = \frac{H \cdot D}{112} \text{ Linien.}$$

Versuch V. Eine 6 Zoll weite und ebenfalls mit eisernen Ringen beschlagne fichtne Röhre hielt einen Wasserdruck von 40 Fuß Höhe aus, berstete aber bey 50 Fuß Wasserhöhe an Stellen, wo sie $4\frac{1}{2}$ bis 5 Zoll dick war. Daher für fichtne Röhren sicher

$$S = \frac{5 \cdot 12}{6 \cdot 40} \cdot H \cdot D = \frac{H \cdot D}{4} \text{ Linien.}$$

Diese Werthe für S, in welchen allemal H in Fussen und D in Zollen gegeben seyn muß, gelten für reines Wasser. Will man die Röhrenstärke bey einer andern Flüssigkeit, deren eigenthümliches Gewicht gegen Wasser = g [§. 9. Zus. II.] ist, finden: so muß man jedesmal S mit g multipliciren.

Beyspiel. Wie stark muß eine Röhre von Fichtenholz seyn, welche, bey einer Weite von 4 Zoll, Grubenwasser, deren eigenthümliches Gewicht man auf $\frac{50}{48,883} = 1,023 = g$ setzen kann, auf eine Höhe von 35 Fuß erhalten soll? Hier ist die Stärke der Röhre nach Versuch V. also $S = 1,023 \cdot \frac{35 \cdot 4}{4} = 35,8 = 36$ Linien $= 3$ Zoll.

Weil die Materien nicht immer von gleicher Güte, und besonders metallne gegoßne Röhren nicht überall von gleicher Stärke sind, so räth Hr. **Langsdorf** an, bleyernen Röhrenwänden 1 Linie, eisernen 2, und hölzernen 6 Linien an der durch Rechnung gefundnen Dicke zuzusetzen.

Anmerkung I. Auch lässt sich mittelst der bisherigen Sätze aus der gegebnen Druckhöhe des Wassers die untere Breite eines **Erddammes** berechnen, wenn der Damm, wie z. B. bey Teichen, dem Seitendruck des Wassers widerstehen soll. Es sey der **Normaldruck** auf die Brustseite ADKG [Tab. V. Fig. 54.] eines Dammes $= BC = N$, so ist $N = AD \cdot DK \cdot \frac{AF}{2} \cdot \gamma'$ Pf. [Zus. IV.] $= AD \cdot l \cdot \frac{h}{2} \cdot \gamma'$, wo $DK = l$ die Länge, $AF = h$ die Höhe des Dammes, und γ' das Gewicht eines Cubikfusses Teichwasser in Pfunden bedeutet.

Der **Normaldruck** BC zerlegt sich aber in einen Horizontaldruck $LC = H$, und in einen Verticaldruck $BL = V$, und es verhält sich $N : H = AD : AF$, also $H = \frac{AF}{AD} \cdot N = \frac{h}{AD} \cdot N = \frac{l \cdot h^2 \cdot \gamma'}{2}$.

Ferner verhält sich $N : V = AD : FD = AD : \frac{ED}{2} = AD : \frac{b}{2}$, also $V = \frac{b}{2AD} \cdot N = \frac{b \cdot l \cdot h\gamma'}{4}$.

Das Gewicht des Dammes, wenn das Gewicht eines Cubikfusses eingestampfter Dammerde $= \varepsilon$ Pf. beträgt, ist $= \Delta EAD \cdot DK \cdot \varepsilon = \frac{b \cdot h \cdot l \cdot \varepsilon}{2}$ Pf. Weil aber, wie wir in der Folge sehen werden, jeder im Wasser befindliche Körper so viel von seinem Gewichte verliert, als das Volumen Wasser wiegt, das er aus der Stelle treibt, so setzt man hier der Sicherheit wegen das Gewicht eines Cubikfusses eingestampfter Dammerde $= \varepsilon - \gamma'$, folglich das Gewicht des Dammes $= D = \frac{b \cdot h \cdot l\,(\varepsilon - \gamma')}{2}$.

Der Horizontaldruck strebt nun den Damm wegzuschieben, und weil man hier den Frictionscoefficienten der Dammerde $= \frac{1}{3}$ annehmen kann, so muß seyn $\frac{1}{3}(D + V) = H$, d. i.

$$\frac{1}{3}\left(\frac{bhl\,(\varepsilon - \gamma')}{2} + \frac{blh\gamma'}{4}\right) = \frac{lh^2\gamma'}{2} \quad \cdot 12$$

$$2bhl\,(\varepsilon - \gamma') + blh\gamma' = 6 \cdot lh^2\gamma$$

$$bhl\,(2\varepsilon - 2\gamma' + \gamma') = bhl\,(2\varepsilon - \gamma) = 6 \cdot lh^2\gamma' \quad : hl$$

oder $b\,(2\varepsilon - \gamma') = 6 \cdot h\gamma'$. Also

die untere Breite $ED = b = \frac{6 \cdot h \cdot \gamma'}{2\varepsilon - \gamma}$.

Beyspiel. Es sey z. B. die Höhe eines Teichdammes oder $h = 15$ Fuß mit Inbegriff der Höhe des Wellenschlags, wofür man 1 bis 3 Fuß rechnet, das Gewicht eines Cubikfusses Wasser oder $\gamma' = 50$ Pf., das Gewicht eines Cubikfusses eingestampfter Erde oder $\varepsilon = 80$ Pf.: so wäre die untere Breite des Dammes oder $b = \frac{6 \cdot 15 \cdot 50}{2 \cdot 80 - 50} = \frac{4500}{160 - 50} = \frac{450}{11} = 40{,}9$ Fuß, wofür man 41 Fuß rechnen kann.

In der Ausübung gibt man aber dem verticalen Durchschnitt eines Dammes nicht die Figur eines gleichschenkeligen Triangels EAD [Fig. 54.], sondern die Figur eines Trapezes EABG [Fig. 55.], und macht nun die Breite der Kappe $AB = DF = \frac{1}{2} \cdot BF = \frac{1}{2} h$. Wenn jedoch die Dämme nicht zu niedrig sind, macht man die Kappe niemals unter 6 bis 8 Fuß, wenn nämlich kein Fahrweg über den Damm geht.

Für die innere Böschung nimmt man $FG = h$, und wenn es seyn kann, so wird die äußere Böschung $DE = \frac{3}{2} \cdot h$ genommen; und ist das Terrain etwas sumpfig, so macht man auch wohl $DE = 2h$, $3h$ bis $6h$.

In unserm Beyspiel könnte man für einen guten festen Boden $AB = 6$ Fuß, $FG = 15$ Fuß, und $ED = EG - (AB + FG) = 41 - 21 = 20$ Fuß annehmen, oder für $AB = 8$ Fuß, wäre $FG = 15$, und $ED = 18$ Fuß.

Anmerkung. Auch gründet sich auf das Bisherige die Bestimmung der Kraft am oberschlägigen Wasserrade, wovon aber in der Hydraulik das Nöthigste erst gesagt werden soll.

§. 61.

Erklärung. Communicirende Röhren oder Gefäße ABFPQ [Tab. IV. Fig. 53.] heißen, die so mit einander verbunden sind, daß das Wasser oder eine andere Flüssigkeit, aus dem einen in das andere übertreten kann, ihre Gestalt mag übrigens seyn, welche sie will.

§. 62.

Lehrsatz. Ist Wasser in communicirenden Röhren oder Gefäßen in Ruhe: so liegen seine Oberflächen in beyden Röhren oder Gefäßen in einerley Horizontalebene.

Beweis. Angenommen, daß die centrische Linie der communicirenden Röhren oder Gefäße in einerley Verticalebene liege, in welcher zugleich der tiefste Punct F [Fig. 53.] der Röhren oder Gefäße sich befindet: so denke man sich durch diesen tiefsten Punct F eine in jener Verticalebene gezogne Horizontallinie EFG, so wie durch den Berührungspunct F einen auf jene Verticalebene winkelrecht stehenden verticalen Durchschnitt FM = W der Röhren oder Gefäße, dessen Schwerpunct in L sey. Ferner ziehe man durch L mit EG die Parallele CLH, und es sey die Normale CA = H = der Höhe der Oberfläche des Wassers in der Röhre ABFM über L, so wie die Normale PH = H' = der Höhe der Oberfläche des Wassers in der Röhre PQFM über L: so muß für den Zustand des Gleichgewichts $W \cdot H \cdot \gamma = W \cdot H' \cdot \gamma$ [§. 60. Zus. II. und Zus. IV.], folglich $H = H'$, oder $AC = PH$ seyn. Demnach ist auch AQ parallel CH, oder die Oberflächen AB, PQ sind in einerley Horizontalebene oder Niveau [§. 59.].

Zusatz I. Liegen in communicirenden Gefäßen die Oberflächen des Wassers nicht in einerley Niveau: so kann dasselbe auch nicht in Ruhe seyn. Hierauf gründet sich in Verbindung §. 58. 60. und deren Zusätze die Bestimmung der Kraft bey der Wassersäulenmaschine, wovon das Weitere in der Hydraulik vorkommen wird.

Zusatz II. Verschiedenartige Flüssigkeiten üben gegen eine Ebene bey einerley Druckhöhe und unter übrigens gleichen Umständen einen Druck aus, der im Verhältniß ihrer eigenthümlichen Gewichte steht, Quecksilber demnach einen 14mal größern Druck als Wasser. Folglich werden in zwey gleich weiten communicirenden Gefäßen verschiedenartige Flüssigkeiten, ohne sich zu vermischen, nur dann in Ruhe seyn, wenn sich ihre Höhen umgekehrt verhalten, wie ihre eigenthümlichen Gewichte, also wird z. B. eine 14 Zoll hohe Wassersäule mit

einer 1 Zoll hohen Quecksilbersäule im Gleichgewicht seyn. Hierdurch erhält man ein Mittel, die eigenthümlichen Gewichte der Flüssigkeiten zu finden.

Anmerkung. Auf den Lehrsatz §. 62. gründet sich in der praktischen Geometrie das Abwägen oder Nivelliren mit der Wasserwaage, so wie sich aus dem Zusatz I. der sehr große Druck erklären läßt, den wenig Wasser auszuüben vermag, wenn es auf weite ringsum verschloßne Höhlungen drückt, und wie große und starke Eisdecken oder Röhren zersprengt, ganze Erdstücken vom Wasser gehoben werden können 2c.

§. 63.

Lehrsatz. Jede flüssige Masse setzt dem Gewichte eines in ihr befindlichen festen Körpers eine Gewalt entgegen, welche dem Gewicht der von ihm verdrängten Portion der flüssigen Masse gleich ist.

Beweis. Man denke sich [Fig. 50.] den Raum = S, den der feste Körper in dem mit einer flüssigen Masse angefüllten Gefäße einnimmt, mit dieser flüssigen Masse selbst angefüllt: so wird diese Portion von der übrigen sie umgebenden Masse mit einer Kraft gehoben, die ihrem Gewichte gleich ist [§. 56. Anm.]. Da nun diese Kraft dieselbe bleibet, womit auch der Raum S angefüllt seyn möge: so wird auch der feste Körper, der diesen Raum einnimmt, mit eben der Kraft in die Höhe gehoben.

Zusatz I. Ist das Gewicht des festen Körpers = p, das der Flüssigkeit in demselben Raume = q: so wirkt der feste Körper noch mit der Gewalt $p - q$ herabwärts. Ist nun der feste Körper von schwererer Art als die Flüssigkeit, so ist $p > q$, und der feste Körper sinkt mit dem Ueberschusse $p - q$. Sind beyde von gleicher Schwere, also $p = q$, so ist $p - q = 0$, und der feste Körper bleibt ruhig an dem Orte. Ist der feste Körper von leichterer Art, so ist $p < q$, und der feste Körper wird mit dem Ueberschusse $q - p$ gehoben.

Zusatz II. Da der feste Körper von schwererer Art mit dem Gewichte p—q sinkt: so kann man ihn, wenn er an einem Waagbalken angehängt ist, mit diesem Ueberschusse im Gleichgewicht erhalten, da sonst außerhalb der Flüssigkeit sein ganzes Gewicht dazu gehört; d. h. der feste Körper verliert von seinem Gewichte so viel, als die Flüssigkeit wiegt, die er verdrängt, d. i. die mit ihm einerley Raum einnimmt.

Zusatz III. Der vorige Zusatz lehrt die eigenthümlichen Gewichte fester Körper in Bezug auf Wasser oder andere Flüssigkeiten finden, indem man erst die Körper in freyer Luft und dann in der Flüssigkeit abwiegt. Es sey das Gewicht eines festen Körpers in freyer Luft oder sein absolutes Gewicht $= p$, das Gewicht des Körpers im Wasser $= \pi$: so ist $p - \pi$, d. h. der Gewichtsverlust im Wasser das absolute Gewicht einer Quantität Wasser von demselben Umfang, den der Körper hat. Da sich nun die absoluten Gewichte wie die eigenthümlichen verhalten, so verhält sich demnach das Gewicht des Wassers zu dem Gewicht des festen Körpers $= p - \pi : p = 1 : g$, wenn man das Gewicht des Wassers zur Einheit annimmt, und g das eigenthümliche Gewicht des festen Körpers bedeutet. Es ist demnach $g = \frac{p}{p - \pi}$ [§. 9. Zus. II.]

Z. E. Ein Stück Quarz wog in freyer Luft (an einem Menschenhaar aufgehängt) an einer feinen Waage 3 Loth, und in destillirtem Wasser 1,92 Loth, so ist $g = \frac{3}{3 - 1,92} = \frac{3}{1,08} =$ 2,777, d. h. dieser Quarz ist 2,777mal schwerer als dieses Wasser.

Zusatz III. Eben so kann man die eigenthümlichen Gewichte flüssiger Massen finden, wenn man einen festen Körper, z. B. eine Glaskugel, nach einander in jeder Flüssigkeit abwiegt, und die Gewichtsverluste bemerkt; es geben diese die Gewichte jeder flüssigen Masse von gleichem Umfange mit der Kugel, und daher die Verhältnißzahlen der eigenthümlichen Gewichte ab.

Z. E. Verliert die Glaskugel im Wasser 0,639, in Milch 0,659 Loth, so hat man die Verhältnisse 639 : 659 = 1,000 : 1,031.

Anmerkung I. Salze und andere Körper, die von Wasser angegriffen werden, muß man in Terpentinöl oder in Weingeiste abwiegen, und durch das Verhältniß dieser Flüssigkeiten gegen Wasser, in die hier gefundnen Verhältnißzahlen multiplicirt, die Verhältnisse jener festen Körper gegen Wasser bestimmen.

Z. E. 100 Theile Steinsalz verlieren im Weingeiste 40,41 Theile, folglich ist hier die Verhältnißzahl $= \frac{100}{40,41}$. Nun ist für Weingeist gegen Wasser die Verhältnißzahl 0,866, folglich ist für Steinsalz gegen Wasser die Verhältnißzahl $= \frac{100}{40,41} \cdot 0,866 = 2,143$.

Anmerkung II. Läßt sich der feste Körper, z. E. Pulver, nicht unmittelbar an die Waage hängen: so bringe man ihn in ein Gefäß (einen gläsernen Eymer mit durchbrochnen metallnen Deckel), das man zuvor im Wasser ins Gleichgewicht gebracht hat, und wiege ihn darin ab.

Anmerkung III. Aus dem Verlust des Gewichts eines festen Körpers im Wasser oder in einer andern Flüssigkeit läßt sich auch der Inhalt eines Körpers bestimmen, indem dieser den Raum des Wassers, welcher obigem Verluste zukommt, gleich ist; und man findet den Inhalt des Körpers, wenn man den Gewichtsverlust durch das Gewicht eines Cubikfusses Wasser oder der Flüssigkeit dividirt [§. 9. Zus. III. 3]. Auf diese Weise kann man den Inhalt irregulärer Körper bestimmen.

§. 64.

Aufgabe. Eine Mischung aus zwey bekannten Massen (in der Voraussetzung, daß ihr körperlicher Raum noch derselbe geblieben ist) hydrostatisch zu erforschen.

Auflösung. Man nenne die beyden Massen und ihre Mischung A, B, M; ihre Gewichte a, b, m; ihren Verlust im Wasser α, β, μ. Ist nun in der Mischung M von der einen Masse A etwas an Gewichte $= x$ enthalten, so ist darin von der andern Masse B etwas an Gewichte $= m - x$. Nun ist nach der Voraussetzung der Verlust im Wasser von x $(a : x = \alpha : \frac{\alpha x}{a}) = \frac{\alpha}{a} \cdot x$, und der Verlust im Wasser von $m - x = \frac{\beta}{b}(m - x)$. Folglich ist $\mu = \frac{\alpha}{a} \cdot x + \frac{\beta}{b}(m - x)$, oder $ab\mu = b\alpha x + a\beta(m - x) = b\alpha x + a\beta m - a\beta x$, oder $a(b\mu - \beta m) = x(b\alpha - a\beta)$, und endlich $x = \frac{a(b\mu - \beta m)}{b\alpha - a\beta}$.

Beyspiel I. Eine Mischung (M) aus Zinn (A) und Bley (B) wiegt 120 Pf. (= m). Nun verlieren 37 Pf. Zinn (= a) im Wasser 5 Pf. (= α), 23 Pf. Bley (= b) im Wasser 2 Pf. (= β), und die 120 Pf. Mischung verlieren im Wasser 14 Pf. (= μ), also hält die Mischung an Zinn = $\frac{37\,(23 \cdot 14 - 2 \cdot 120)}{23 \cdot 5 - 37 \cdot 2} = \frac{3034}{41} = 74$ Pf., folglich an Bley = 120 — 74 = 46 Pf.

Beyspiel II. Die Krone des Königs Hieron, welche Archimedes untersuchte, bestand aus Gold und Silber, und es war a = b = m = 20 Pf., α = 7821 Gran, β = 13849 Gran, μ = 9600 Gran: demnach enthielt sie an Gold = $\frac{(\mu - \beta)\,a}{\alpha - \beta} = \frac{4249 \cdot 20}{6028} = 14{,}09$ Pf., und daher an Silber = 20 — 14,09 = 5,91 Pf.

Anmerkung. Auf gleiche Weise lassen sich Münzen untersuchen und prüfen, jedoch alles unter der Voraussetzung, daß die Gemische einen Raum einnehmen, welcher dem der Theile gleich sey.

§. 65.

Lehrsatz. Soll ein schwimmender Körper (d. i. der sich nur zum Theil in eine Flüssigkeit eintaucht) in verticaler Stellung schwimmen: so müssen die Schwerpuncte des ganzen Körpers AC [Fig. 56.], und des eingetauchten Theils BD, in einerley Verticallinie liegen, am sichersten jener unter diesem.

Beweis. Denkt man sich den Raum BD, welchen der eingetauchte Theil einnimmt, mit der Flüssigkeit erfüllt: so hat diese Portion mit dem eingetauchten Theile einerley Schwerpunct, durch welchen die Wirkung der umgebenden Masse in die-

sem sowohl als jenem Falle vertical geht. Diese Verticallinie aber muß mit der Directionslinie [§. 22.] des ganzen Körpers zusammenfallen, wenn er aufrecht erhalten werden soll. Folglich sind obige Schwerpuncte in einerley Verticallinie.

§. 66.

Lehrsatz. Ein fester schwimmbarer Körper AC [Fig. 56.] taucht sich in eine Flüssigkeit schwererer Art so tief ein, daß das Gewicht der Flüssigkeit, die er verdrängt, dem ganzen Gewicht des festen Körpers gleich ist.

Beweis. Das Gewicht einer solchen Portion BD der Flüssigkeit setzt sich dem Sinken des festen Körpers AC entgegen [§. 63.]. Da nun dieser mit seinem ganzen Gewicht sinken will, so muß jenes diesem gleich seyn, wenn ein Gleichgewicht Statt finden soll.

Zusatz I. Da das Product des Raums AC und des eigenthümlichen Gewichts des festen Körpers sein Gewicht, und das Product des Raums BD und des eigenthümlichen Gewichts der Flüssigkeit, wenn man nämlich beyde Producte noch mit dem Gewicht eines Cubikfusses Wasser multiplicirt [§. 9. Zus. III. 2)], das Gewicht einer so großen Portion Flüssigkeit davon gibt, als der Raum BD fassen kann [§. 60. Zus. I. 1)], beyde Gewichte aber, folglich auch beyde Producte, gleich seyn müssen: so verhalten sich die eigenthümlichen Gewichte des festen Körpers und der flüssigen Materie, wie die Größe des eingetauchten Theils zur Größe des ganzen Körpers, d. i. wie BD AC: folglich, wenn AC ein gerader Cylinder ist, wie CD : CF [§. 60. Zus. II. 4) und Geom. §. 200. Zus.].

Beyspiel. Es sey der Cylinder von Lindenholz in Wasser gesenkt, und man fände, wenn man CF in 100 Theile theilt, für CD = 60 Theile: so ist Wasser zu Lindenholz = 100 : 60 = 1 : 0,6 = 1,000 : 0,600.

Zusatz II. Sinkt einerley fester Körper AC in der einen Flüssigkeit bis E, in der andern bis D: so verhalten sich die eigenthümlichen Gewichte dieser Flüssigkeiten, wie die eingetauchten Theile umgekehrt.

Beyspiel. Es stehe der Cylinder von Lindenholz im Wasser bis CE = 60, im Weine bis CD = 65: so ist

Wasser : Lindenholz	=	100 : 60
Lindenholz : Wein	=	65 : 100
also Wasser : Wein	=	65 : 60 =
		1,000 : 0,924.

Zusatz III. Sind zwey schwimmende Körper von verschiedner Art von gleichem Gewichte, so verdrängen sie gleiche Portionen der flüssigen Masse; sind sie von gleicher Größe, so verhalten sich ihre eigenthümlichen Gewichte, wie die Portionen der flüssigen Masse, die sie verdrängen.

Zusatz IV. Multiplicirt man die Größe des eingetauchten Theils eines schwimmenden festen Körpers mit dem Gewicht eines Cubikfusses der Flüssigkeit: so erhält man das Gewicht des schwimmenden Körpers [§. 66.], und dieses Gewicht ist hier die Kraft, mit welcher der schwimmende Körper in der Flüssigkeit in die Höhe getrieben wird [§. 63. Zus. I.].

Nennt man V = die Größe eines völlig eingetauchten, aber schwimmbaren, festen Körpers, γ das Gewicht eines Cubikfusses der Flüssigkeit, in welcher der Körper eingetaucht ist: so ist $V \cdot \gamma$ = die Kraft, welche sich dem Einsinken des Körpers widersetzt [§. 63.], oder welche den eingetauchten Körper in die Höhe zu treiben sucht. Ist ferner P das absolute Gewicht des eingetauchten Körpers, und g das eigenthümliche Gewicht desselben in Hinsicht der Flüssigkeit, in welcher der Körper getaucht ist oder schwimmt: so ist, weil nach §. 9. Zus. III. 2) $P = V \cdot g \cdot \gamma$, auch $V \cdot \gamma = \frac{P}{g}$, d. h. man findet auch die Kraft, mit welcher ein Körper in der Flüssigkeit, worein man ihn eintaucht und er schwimmt, in die Höhe getrieben wird, wenn man das absolute Gewicht des eingetauchten Körpers mit dem eigenthümlichen Gewicht des festen Körpers dividirt.

Zusatz V. Einen festen Körper, der schwerer als die Flüssigkeit ist, bringt man zum Schwimmen, wenn man ihn in einen ausgehöhlten Raum ausdehnt, so daß sein Gewicht

kleiner ist, als die Flüssigkeit, die diesen Raum ausfüllt. Ein hohles Gefäß kann daher Körper, die sonst sinken würden, wenn man sie daran befestiget, erhalten, auch selbst von innen mit Gewichten beschwert werden.

Hierauf beruht die Methode, versunkne Lasten aus der Tiefe zu heben, eingerammelte Pfähle bey Wasserbauen wieder herauszuziehen u. dergl. m.

Zusatz VI. Beschwert man die obere Grundfläche AF [Fig. 56.] eines Cylinders mit verschiedenen Gewichten so, daß der Cylinder in allen Flüssigkeiten gleich tief, etwa bis D, einsinkt: so ist die Verhältnißzahl für jede Flüssigkeit das Gewicht des Cylinders nebst dem aufgelegten Gewichte, welches ihn bis D einsenkt.

Hierauf gründet sich die Einrichtung der Senkwaagen, die nach den verschiedenen Anwendungen die Namen Wein-, Bier-, Soolwaagen führen.

§. 67.

Aufgabe. Ein eigenthümlich leichterer Körper, als Wasser, ist mit einem eigenthümlich schwerern Körper, als Wasser, verbunden; man sucht die Kraft, womit die Körper von dem Wasser in die Höhe getrieben werden.

Auflösung. Es sey das

eigenthüml. Gew. des Wass. : eigenthüml. Gew. des leichtern Körpers $= 1 : n$

eigenthüml. Gew. des Wass. : eigenthüml. Gew. des schwerern Körpers $= 1 : m$,

wo n einen ächten, m einen unächten Bruch bedeutet. Das absolute Gewicht des leichtern Körpers heise $= p$, des schwerern Körpers $= P$: so ist die Kraft, womit der leichtere Körper in der Flüssigkeit in die Höhe getrieben wird $= \frac{p}{n}$, und die Kraft, womit der schwere Körper in die Höhe getrieben

wird, $= \frac{P}{m}$ [§. 66. Zus. IV.]. Die gesammte Kraft des Wassers ist daher $= \frac{p}{n} + \frac{P}{m}$, das Gewicht des Körpers ist $= P + p$, folglich für den Zustand des Gleichgewichts $P + p = \frac{P}{m} + \frac{p}{n}$. Aus dieser Gleichung folgt $P - \frac{P}{m} = \frac{p}{n} - p$, oder $\frac{Pm - P}{m} = \frac{p - np}{n}$, oder $P\,(m - 1)\,n = p\,(1 - n)\,m$, worin von den vier Größen P, p, m, n aus je dreyen die vierte gefunden werden kann.

Beyspiel. Es sollen 4 Pf. geschmiedetes Eisen, welches 8,28mal schwerer als Wasser ist, mit einem Stück Fichtenholz verbunden werden, welches 0,49mal schwerer als Wasser ist; man fragt, wie viel Pfund Holz man nöthig hat, damit die 4 Pfund Eisen im Wasser schwebend erhalten werden?

Hier ist $P = 4$ Pf., $m = 8{,}28$, $n = 0{,}49$; also $p = \frac{P\,(m-1)\,n}{(1-n)\,m} = \frac{4\,(8-1)\,0{,}49}{(1-0{,}49)\,8{,}28} = \frac{14{,}2688}{4{,}2228} = 3{,}3$ Pf., d. h. man muß 3,3 Pf. Fichtenholz mit den 4 Pf. Eisen verbinden, wenn das Eisen im Wasser schwebend erhalten werden soll.

Anmerkung. Nimmt man in vorigem Beyspiel mehr Holz, so steigt der Körper, nimmt man weniger, so sinkt er.

Auf §. 67. beruhen auch die Wirkungen der Schwimmkissen von Kork, der voll Luft gefüllten Blasen, und anderer leichten Körper, deren sich der Mensch bedient, um aufrecht im Wasser zu schwimmen.

Auch das Erheben in die Luft mittelst eines Luftballons gehört hieher.

III.

Erste Gründe der Aerostatik.

§. 68.

Erklärung. Jede flüssige, elastische und mehr oder weniger schwere Masse nennt man Luft, welche man in die gemeine oder atmosphärische Luft, und in die künstlichen Luft- oder Gasarten, die durch chemische Operationen aus gewissen Körpern erhalten werden, einzutheilen pflegt.

Die Wissenschaft von der Luft, rücksichtlich der mathematischen Bestimmung ihrer Eigenschaften, heißt im Allgemeinen die Aerometrie, und wird, in so fern sie vom Gleichgewicht der Luft handelt, die Aerostatik genannt.

Anmerkung. Wir schränken uns hier blos auf die gemeine oder atmosphärische Luft ein, mit welcher die künstlichen Luftarten, in so fern sie gleichfalls flüssig, elastisch und schwer sind, einerley Eigenschaften gemein haben, so daß sie nur in gewissen bestimmten Modificationen von jener unterschieden sind.

§. 69.

Erfahrung. Bewegt man die Hand, oder eine andere Fläche, etwas geschwind gegen das Gesicht zu: so fühlt man, daß ihr etwas vorausgeht, welches an das Gesicht stößt, und man sieht, daß leichte Körper dadurch fortgetrieben werden.

Zusatz. Da die Luft so leicht zu trennen ist, und alle leer scheinende Räume der Körper ausfüllt: so ist sie eine flüssige Materie, und muß also alle Eigenschaften haben, welche der flüssigen Materie wegen ihrer respectiven Bewegbarkeit zukommen.

§. 70.

Erfahrung. Wird eine an beyden Enden offne, nicht allzu lange Röhre ins Wasser gesteckt, und sobald sie davon angefüllt ist, am obern Ende mit dem Finger oder auf andere Art verschlossen: so wird, wenn man sie wieder herausgezogen hat, kein Wasser aus ihr fließen, ob sie gleich unten offen ist. Oeffnet man das obere Ende, so fließt alles Wasser aus.

Zusatz I. Am untern Ende der Röhre ist nichts als Luft, welche also gegen das Wasser so stark in die Höhe drücken muß, als es vermöge seiner Schwere herabfallen will. Wird das obere Ende geöffnet, so muß die daselbst befindliche Luft das Wasser so stark abwärts, als die am untern Ende dasselbe aufwärts drücken, daß also der beyderseitige Druck sich aufhebt, und nun das Wasser der Wirkung seiner Schwere ungehindert folgt.

Zusatz II. Der Druck, den die Luft an beyden Enden der Röhre äußert, ist, ob er gleich doppelt zu seyn scheint, doch nur einfach: indem bey flüssigen Massen, die nach allen Seiten drücken, der Druck nach unten den Druck nach oben hervorbringt. Da nun der Druck nach unten eine Wirkung der

Schwere ist: so muß die Luft, wie das Wasser, eine schwere flüssige Materie seyn, folglich mit dem Wasser, rücksichtlich der Schwere und Flüssigkeit, alle Eigenschaften gemein haben.

Anmerkung. Auf §. 70. beruht die Einrichtung des Stechhebers, der Nutzen des Spundloches an Fässern.

§. 71.

Erfahrung. Wird ein umgekehrtes Trinkglas senkrecht ins Wasser gedrückt: so tritt zwar desto mehr Wasser hinein, je tiefer man das Glas einsenkt, aber nie so viel, daß es inwendig so hoch als auswendig stünde. Läßt man mit dem Drucke etwas nach, so fühlt man, daß sich das Glas von selbst hebt, und sieht auch, daß das innere Wasser nicht mehr so hoch als zuvor steht.

Zusatz I. Berührt der Rand des umgekehrten Trinkglases die Oberfläche des Wassers, so wird der Luft, die das Glas füllt, der Ausgang versperrt, und sie kann, da sie dem hineintretenden Wasser Platz machen muß, nirgends anders als nach oben zu ausweichen, wo sie nun einen engern Raum als zuvor einnimmt. Demnach werden durch das hineingetretne Wasser die Theile der eingeschloßnen Luft näher zusammen oder in einen engern Raum gebracht, d. i. zusammengedrückt, oder die Luft wird **comprimirt**. Bey nachgelaßnem Drucke hebt sie das Glas, treibt von dem hineingetretnen Wasser etwas wieder heraus, und erfüllt wieder einen größern Raum. Demnach strebt die zusammengedrückte Luft nach allen Seiten ihre Theile wieder von einander zu entfernen und sie in einem größern Raum auszubreiten, d. i. sich **auszudehnen** oder zu **dilatiren**. Da hiernach die Luft sich durch eine äußere Kraft zusammendrücken läßt, und sich von selbst wieder ausbreitet, wenn die äußere Kraft nachläßt: so ist die Luft eine elastische Materie [§. 1. Anmerk.]. Die Kraft, welche die Theile, wenn sie sich einander genähert haben, wieder aus einander treibt, heißt die **Federkraft** oder die **Elasticität der Luft**.

Zusatz II. Die Luft unterscheidet sich von dem **Wasser** theils dadurch, daß die heftigste Kälte der Luft ihre Flüssigkeit

nicht benehmen kann, theils und vorzüglich durch ihre Elasticität. Die Luft ist daher eine schwere und elastische flüssige Materie, das Wasser aber eine schwere und wenig oder fast gar nicht elastische Materie.

Zusatz III. Die Elasticität der Luft muß desto größer seyn, je mehr sie zusammengedrückt wird. Auch muß die Zusammendrückung der Luft so lange dauern, bis die ausdehnende Kraft der zusammendrückenden gleich ist, weil sonst beyde einander das Gleichgewicht nicht halten könnten.

Zusatz IV. Die Zunahme der Dichtigkeit und Elasticität einer elastischen Masse durch Druck hat unstreitig ihre Grenzen, wenn nämlich die Theilchen der Masse einander so nahe gebracht sind, daß sie nicht näher zusammenkommen können. Man mag also das Glas nach §. 71. noch so tief ins Wasser drücken, so bleibt immer ein obrer Raum von Wasser leer, und blos mit zusammengedrückter Luft angefüllt.

Anmerkung. Auf letztern Zusatz gründet sich die Vorrichtung mit der Taucherglocke, in deren Mitte ein Querholz zum Sitz für den Taucher befestigt, und deren unterer Rand mit Gewichten zum Niedersinken ins Wasser beschwert ist.

§. 72.

Erfahrung. Bindet man eine wenig Luft enthaltende, also eine schlaff gemachte Blase fest zu, und erwärmt sie allmälich auf allen Seiten: so dehnt sie sich nach und nach zu einem runden Körper aus, und zerspringt auch wohl.

Zusatz I. Die Ausdehnung der Blase kann durch nichts Anders erfolgen, als daß die in den Falten der Blase enthaltene Luft den ganzen Raum der Blase erfüllt. Da nun dieß die Wärme bewirken muß, indem nur diese mit der Blase in Berührung kam, sie durchdrang und sich mit der Luft verband: so folgt daraus, daß die Luft, so wie jede andere feste oder flüssige Materie von der Wärme ausgedehnt wird, d. i. eine Quantität Luft nimmt warm einen größern Raum ein, als kalt, und vermag, so lange sie warm ist, einer dichtern kalten Luft das Gleichgewicht zu halten.

Zusatz II. Wenn man ein Gefäß dergestalt erhitzt, daß die sich ausdehnende Luft einen Theil von sich heraustreibt, hierauf genau verschließt, daß keine Luft wieder eintreten kann, und langsam erkalten läßt: so wird es weniger wiegen, als wenn man durch die Oeffnung nachmals wieder Luft hat eintreten lassen. Hieraus bestätigt sich auch die Schwere der Luft [§. 71. Zus. II.], und es ist begreiflich, wie durch Wärme der Luft ein Luft- oder Wetterwechsel in den Bergwerken, Windöfen, Kaminen ꝛc. bewirkt werden kann.

Zusatz III. Wenn man ein Gefäß mit einer engen Röhre erhitzt und die Röhre ins Wasser steckt: so erhält die äußere Luft nach einiger Zeit das Uebergewicht, und treibt so viel Wasser hinein, daß der Raum, den die verkältete Luft verläßt, ausgefüllt wird. Durch Vergleichung dieses Raums mit dem Raume des ganzen Gefäßes kann man bestimmen, um welchen Theil ihres Raums die Luft durch die Hitze vorher ausgedehnt war.

Zusatz IV. Wäre eine Quantität Luft in einem Gefäße so eingeschlossen, daß sie sich in keinen größern Raum ausdehnen könnte: so bliebe bey der Erwärmung ihre Dichtigkeit zwar dieselbe, aber ihr Bestreben, sich auszudehnen, d. i. ihre Elasticität, würde größer.

§. 73.

Erklärung. Die ganze Luftmasse, welche die kugelförmige Erde allenthalben umgibt und eine hohle Kugelschale bildet, heißt der **Luftkreis**, oder, von den darin befindlichen feuchten Dünsten, der **Dunstkreis** der Erde, auch die **Erdatmosphäre**.

§. 74.

Lehrsatz. Die Luft ist an einer Stelle, näher bey der Erde, dichter und elastischer, als an einer höhern, in verschiednen gleich hohen Stellen aber von gleicher Dichtigkeit und Elasticität.

Beweis. Ueber der Fläche BC [Tab. IV. Fig. 50.] zwischen den festen Grenzen AB und DC sey Luft eingeschlossen: so wird sie vermöge ihrer Flüssigkeit und Schwere in dem Raume ABCD so wirken, wie Wasser in einem Gefäße, so daß sie in jede Stelle S innerhalb dieser Grenzen einzudringen sucht, und jeder Theil S dieser Luft von dem Gewichte der darüber stehenden Luftsäule gedrückt wird; welches Gewicht also desto größer ist, je tiefer der Theil S unter einer Horizontalfläche AD sich befindet.

Alles dieß hat die Luft mit dem Wasser gemein. Nun aber entsteht ein großer Unterschied bey der Luft durch ihre Elasticität, daß sie durch ein Gewicht so stark zusammengedrückt wird, bis ihre Elasticität diesem Drucke gleich wird [§. 71. Zus. III.]. Demnach muß die Luft in einer kleinern Entfernung von der Erdoberfläche dichter und elastischer seyn, als in einer größern; in gleicher Entfernung von der Erdoberfläche oder in gleich hohen Stellen aber, wo die zusammendrückende Kraft gleich stark ist, muß die Dichtigkeit und Elasticität der Luft gleich groß seyn. Beym Wasser hingegen ist die Dichtigkeit in jeder Tiefe gleich.

Zusatz I. Die Luft strebt in einer niedrigen Gegend EF [Fig. 50.] vermöge ihrer Elasticität sich stärker auszubreiten, als in einer höhern AD, und in jedem Raum, der entweder leer oder mit einer dünnern Luft angefüllt wäre, so lange einzudringen, bis die innere Luft so dicht geworden ist, daß sie dem Drucke der äußern das Gleichgewicht halten kann. Dieses bestätigt auch die Erfahrung. Denn bringt man ein in einer tiefern Gegend der Erde oder an dem Fuß eines Berges mit Luft angefülltes und mit einem Hahn verschlossenes Gefäß auf einen Berg, so fährt beym Oeffnen des Hahns ein Theil Luft heraus; trägt man eben dieses Gefäß mit Luft gefüllt verschlossen wieder herab, so fährt beym Oeffnen des Hahns am Fusse des Berges Luft hinein.

Zusatz II. In ein Zimmer dringt durch die verschiednen Oeffnungen die Luft von außen so lange hinein, bis die Elasticität der innern Luft dem Drucke der äußern das Gleichgewicht hält. In diesem Zustande drückt die innere Luft von der Decke herab die, welche ihr zur Unterstützung dient, mit einer dem Drucke der äußern Luft gleichen Gewalt, und erhält bey dem Versuch §. 70. Wasser in der Röhre eben so gut, als die ganze Luftsäule außerhalb des Zimmers. Demnach lassen sich Versuche über den Druck der Luft im Zimmer eben so gut als unter freyem Himmel anstellen.

Zusatz III. Um die Erdkugel setzt sich die Luft in Gestalt einer concentrischen Kugelschale, und erhält sich, indem sie sich rings um die Erde zusammenschließt, von selbst, ohne durch etwas Anders eingeschlossen zu werden, weil jede Luftschicht von den daranstoßenden zusammengehalten wird. Alle diese Luftschichten aber müssen, wenn sie einander das Gleichgewicht halten sollen, von gleicher Höhe seyn, und sich also in einer und derselben Horizontalfläche endigen [§. 59.].

§. 75.

Aufgabe. Den Druck der Atmosphäre [§. 75.] zu bestimmen.

Auflösung. 1) Versuch. Eine über 28 Pariser Zoll*) lange gläserne Röhre AB [Tab. V. Fig. 57.] sey mit Quecksilber gefüllt, und oben luftdicht (d. i. daß keine Luft eindringen kann) verschlossen. Steckt man diese Röhre mit der untern zugehaltnen Oeffnung in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß: so sinkt das Quecksilber in der Röhre, wenn man sie unten öffnet, von B bis D, so daß es in einer Höhe CD von etwa 28 Pariser Zollen über der Oberfläche MN im Gefäße stehen bleibt.

2) Aus diesem Versuche folgt, daß der Druck der Atmosphäre auf jede Fläche das Gleichgewicht

*) Der Pariser Fuß : Rheinländ. Fuß : Leipziger Fuß = 144 : 139,13 : 125,1 = 14400 : 13913 : 12510.

mit einer Quecksilbersäule von 28 Pariser Zollen Höhe halte. Denn zeichnet man zu mehrerer Deutlichkeit in dem Quecksilber die eingebildeten Grenzen, von A nach E, daß man sich eine gebogne Röhre vorstellen könne: so steht über E eine Luftsäule, so weit die Atmosphäre reicht, drückt auf das Quecksilber in der Röhre, und erhält es bis D. Nun ist das Quecksilber in dem untern Theile der Röhre CAE für sich im Gleichgewichte, folglich hält die Luftsäule über E das Gleichgewicht mit der Quecksilbersäule CD. Demnach muß die Atmosphäre gegen die Fläche C so stark drücken, als eine Quecksilbersäule, deren Grundfläche die Oeffnung der Röhre CB, und deren Höhe CD = 28 Pariser Zolle ist.

3) Da Quecksilber 14mal schwerer als Wasser ist, folglich mit einer Wassersäule von = 14·28 Zollen, von ungefähr 32 Pariser Fussen Höhe das Gleichgewicht hält [§. 62. Zus. II.]: so ist der Druck der Atmosphäre gegen eine Fläche auch dem Gewichte einer Wassersäule von ungefähr 32 Pariser Fuß Höhe über dieser Fläche gleich.

Zusatz I. Die Röhre wird in B luftdicht verschlossen, um den Druck der Luft auf D abzuhalten. Denn öffnete man bey B die Röhre: so würde der Druck der Luft auf D den entgegengesetzten Druck auf E ganz oder zum Theil aufheben, daß also D herabsinken müßte. Da nun B verschlossen, und das Quecksilber, welches die ganze Röhre bis B anfüllte, bis D gesunken ist, ohne daß Luft in diesem Raume eindringen kann, so ist in BD eine Luftleere.

Zusatz II. Aus der Vorstellung §. 75. 2) erhellet, daß anstatt der geraden Röhre BA in einem Gefäße mit Quecksilber auch eine umgebogne Röhre wie BAF dienen könne, in deren kurzem Schenkel das Quecksilber so hoch wie im Gefäße bis E steht. Wird alsdann die Oeffnung bey F luftdicht verschlossen: so ist die wenige in dem Raume EF eingeschloßne

Luft durch ihre Elasticität im Stande, die Quecksilbersäule CD noch eben so gut zu tragen, als vorher der Druck der ganzen Atmosphäre es that.

Zusatz III. Der Versuch §. 75.1) erfolgt so gut im Zimmer als unter freyem Himmel, wegen §. 74. Zus. II.; aber in verschiednen Höhen über unsrer Erde zeigt sich die Höhe verschieden, wegen §. 74. Zus. I. Die Höhe CD = 28 Pariser Zolle gilt für Beobachtungen in der Nähe der Meeresfläche, ist aber auch daselbst veränderlich, wovon im Folgenden das Weitere vorkommen wird.

Zusatz IV. Nach §. 75.3) lässt sich nun der Druck der Atmosphäre auf jede gegebne Fläche berechnen, wenn man sich über der Fläche eine Wassersäule von ungefähr 32 Pariser oder 37 Leipziger Fuß vorstellt, und das Gewicht dieser Wassersäule berechnet.

Wäre z. B. die Fläche 1 Quadratfuß, so beträgt der Druck der Luft darauf = 37 · 48,883 [§. 9. Zus. III.] = 1808,67, dieses sind ungefähr 1809 Pf.

Anmerkung I. Auf §. 75. gründet sich vorzüglich die Einrichtung des Hebers und der Wasser- oder Saugpumpe, welche Letztere in der Hydraulik noch etwas näher betrachtet werden soll.

Anmerkung II. Die Veranlassung zu dem Versuch §. 75.1) gab ein Florentinischer Gärtner, der das Wasser mit einer Saugpumpe über 18 Ellen zu heben vergeblich bemüht war, und über diese Erscheinung den Gallilái befragte, welcher dann bald fand, daß die Kraft, womit der Druck der Atmosphäre das Wasser erhebt, beschränkt seyn müsse. Da der Versuch mit einer Wassersäule, welcher die Grenze 32 Fuß geben würde, zu beschwerlich ausfallen mußte: so stellte ihn Evangelista Toricelli, ein Schüler des Gallilái im Jahr 1643. zuerst mit der Quecksilberröhre an, welche daher nach ihm die Toricellische Röhre, so wie der leere Raum DB [Fig. 57.] die Toricellische Leere benannt wird. Uebrigens ist die Toricellische Röhre wesentlich nichts Anders, als das im Folgenden vorkommende Barometer, welches daher zu diesem Versuch genommen werden kann.

§. 76.

Aufgabe. Dichtigkeit und Elasticität der Luft mit dem Drucke zu vergleichen.

Auflösung. 1) Versuch. Eine gläserne gebogne Röhre ABC [Fig. 58.], deren beyde Schenkel vertical sind, war in C geschlossen, in A offen. Der durchaus gleich weite Schenkel EC war 12 Zoll hoch, der andere DA aber viel höher. Der untere horizontale Theil DBE war mit Quecksilber gefüllt, so daß DE horizontal, folglich die in EC eingeschlossne Luft mit der äußern bey 28 Zoll Barometerhöhe von einerley Beschaffenheit war. Nun füllte man zweymal Quecksilber in den langen Schenkel, daß es darin bis H, A, im andern aber bis G, F stand, und man fand das erste Mal gH = 14″, GC = 8″, und das zweyte Mal FA = 28″, FC = 6″.

2) Bey diesem Versuche sind die Räume 12, 8, 6, welche die Luft im Schenkel EC nach und nach einnahm, und die drückenden Kräfte 28, 42, 56; folglich jene umgekehrt wie diese.

Denn bey dem mit Luft angefüllten Raume EC = 12″, war der Druck der Atmosphäre = 28″, bey dem Raume GC = 8″ war der Druck mit 14″ vermehrt, also der zweyte Druck = 28″ + 14″ = 42″; bey dem Raume FC = 6″ war der zweyte Druck abermals mit 14″ vermehrt, also der dritte Druck = 42″ + 14′ = 56″. Und nun ist offenbar 12 : 8 = 42 : 28; 12 : 6 = 56 : 28; 8 : 6 = 56 : 42. Demnach verhalten sich die Räume umgekehrt wie die zusammendrückenden Kräfte, welches man das **Mariottische Gesetz** nennt, weil **Mariotte** diesen Versuch zuerst angestellt hat.

3) Da die Elasticität dem Drucke gleich ist [§. 71. Zus. III.]: so verhalten sich auch die Größen der Elasticität umgekehrt wie die Räume.

§. 77.

Erklärung. Ein Werkzeug, womit man die Luft in einem eingeschloßnen Raume so stark verdünnen oder so viel davon herausschaffen kann, daß das Uebrige kaum mehr merklich ist, heißt eine **Luftpumpe**.

Zusatz I. Ein Raum kann zwar nie luftleer gemacht oder aus ihm alle Luft ausgepumpt werden; die Luftpumpen sind also nur in dem Grade vollkommner, je näher sie diesem Zwecke kommen, oder die Luft mehr verdünnen.

Im weitläufigen Sinne begreift das Wort **Luftpumpe** auch diejenigen Werkzeuge, welche die Luft verdichten. In diesem Verstande theilt man die Luftpumpen in Saug- und Druckpumpen ein, die zuweilen auch Dilatations- und Comprimationsmaschinen heißen.

Zusatz II. Verdünnt man aufs Möglichste die Luft in einer metallnen oder gläsernen hinreichend starken Kugel, deren Hals mittels eines Hahns geöffnet und verschlossen werden kann, wiegt sie in diesem Zustande, und abermals, wenn man die Luft wieder hineingelassen hat: so gibt der Unterschied das Gewicht der Luft in diesem Raume, welches sich mit einer gleich großen Portion Wasser vergleichen läßt.

So hat man nach einer Mittelzahl die Luft nahe an der Oberfläche der Erde bey mittlerer Temperatur 800mal leichter als Wasser gefunden.

§. 78.

Erklärung. Die mannichfaltigen Erscheinungen in der Erdatmosphäre [§. 73.] heißen **Lufterscheinungen**, und hängen von dem verschiednen Zustand derselben ab, welcher mancherley Veränderungen, **Witterungen**, unterworfen ist, deren Ursachen in den abwechselnden Graden der Elasticität der Luft, Wärme, Dichte, Feuchtigkeit und dergl. liegen. Beobachtungen hierüber anzustellen, dienen die meteorologischen **Werkzeuge**

oder die **Wetterinstrumente**, als: **Barometer**, **Thermometer**, **Manometer**, **Hygrometer** :c.

§. 79.

Erklärung. Wird die Torricellische Röhre [§. 75. Anm. II.] an einem Brete befestiget, und mit einem abgetheilten Maßstabe (Scala) versehen: so hat man sie, besonders in diesem Zustande, **Barometer** genannt, weil sie den Druck der Atmosphäre zu bestimmen dient. Die Höhe, in welcher das Quecksilber darin steht, heißt die **Barometerhöhe**.

§. 80.

Erfahrung. **Die Barometerhöhe zeigt sich nicht nur an verschiednen Orten, sondern auch an einerley Ort zu verschiednen Zeiten verschieden.**

Zusatz I. Der Druck der Luft auf das Barometer muß also an verschiednen Orten sowohl, als in verschiednen Zeiten zu- und abnehmen.

Zusatz II. Da dieser Druck von der Elasticität der Luft entsteht, diese aber aus dem Gewichte der darüber stehenden Luftsäule sowohl, als auch aus dem jedesmaligen Grade der Wärme entspringt: so beweist die veränderte Barometerhöhe, daß entweder in dem Gewichte der Luftsäule, oder in der Wärme der Luft, oder in beyden zugleich, eine Veränderung vorgegangen sey. Das Barometer kann also nicht, wie die Natur anzeigt, die Gewichte der Luft, sondern eigentlich nur ihre Elasticitäten mit einander vergleichen, auch keineswegs sie ausmessen.

Zusatz III. Da der Druck, den die Elasticität der Luft auf das Barometer bald mehr, bald weniger äußert, das Quecksilber bald höher treibt, bald wieder sinken lässt: so muß die Barometerröhre entweder in einem mit Quecksilber zum Theil angefüllten Gefäße stecken, oder unten wieder aufwärts

gekrümmt seyn, damit das Quecksilber in der Röhre den gehörigen Zu- und Abfluß haben könne. In beyden Fällen aber wird die Barometerhöhe von der horizontalen Oberfläche MN [Fig. 57.] an gerechnet.

Zusatz IV. Beym Steigen und Fallen des Barometers verändert sich auch jedesmal die horizontale Oberfläche MN [Fig. 57.]; daher entweder der an der Scale angebrachte Zeiger darnach verschoben werden muß, oder das Fallen in dem einen Schenkel, und das Steigen in dem andern, gegen einander in Rechnung zu bringen ist, oder man dem Gefäße, welches dem Quecksilber in der Röhre Zu- und Abfluß gewährt, im Verhältniß gegen die Röhre eine große Weite zu geben hat.

Anmerkung. Man hat Barometer von vielerley Gestalt und Einrichtung, wovon im Allgemeinen hier nur Folgendes zu bemerken ist:

1) Alle Barometer können in zwey Hauptarten eingetheilt werden, nämlich in einfache und doppelte, von denen jene blos mit Quecksilber, diese aber zugleich mit einer leichtern Flüssigkeit gefüllt sind.
2) Zu richtigen Beobachtungen dienen die einfachen geraden Barometer, unter denen das Heberbarometer einen großen Vorzug hat. Man sehe hierüber Luz vollständige Beschreibung aller bisher bekannten Barometer, Nürnberg 1784., und Voigts Supplemente dazu, Leipzig 1802.

§. 81.

Erklärung. Beobachtet man an einem Orte ein oder mehrere Jahre hindurch täglich die verschiednen Barometerhöhen, und nimmt hieraus das Mittel: so heißt dieses die **mittlere Barometerhöhe des Orts.**

Zusatz. Da das Barometer zu gleicher Zeit in höhern Gegenden niedriger stehen muß als in niedrigen: so wird auch die mittlere Barometerhöhe auf Bergen kleiner, im Thale und in tiefen Bergwerken aber größer seyn. Hieraus folgt, daß die Höhe eines Ortes auf der Erde mit der Barometerhöhe daselbst in genauer Verbindung stehen müsse, und daß man also mittels barometrischer Beobachtungen die Höhe eines Orts über dem andern bestimmen kann, wovon noch etwas weiter unten folgen soll.

Anmerkung. Diejenigen, welche aus dem Steigen und Fallen des Barometers die Witterung vorhersehen wollen, nennen es daher Wetterglas. Die Wetterregeln, die aber viele und große Ausnahmen haben, sind vorzüglich folgende: Das Barometer steigt gewöhnlich über die mittlere Barometerhöhe des Orts, wenn das Wetter heiter, beständig, ruhig und trocken ist, und fällt unter diese Höhe, wenn das Wetter regenhaft, veränderlich, stürmisch und feucht wird. Im Winter pflegt die größte und kleinste Höhe zu erfolgen. In kalten Ländern sind die Veränderungen am Barometer schneller und merklicher, als in heißen Ländern. Fällt das Barometer bey gutem Wetter, so kommt gemeiniglich Regen oder Wind; steigt es bey Regenwetter, so folgt gut Wetter darauf. Bey heißer Witterung zeigt das Fallen Gewitter, bey kalter hingegen das Steigen Frost, das Fallen Thauwetter an.

§. 82.

Erfahrung. Eine gläserne Röhre, die sich in eine Kugel oder einen Cylinder endiget, sey mit einer flüssigen Masse zum Theil angefüllt: so wird, wenn man die Kugel erwärmt, die Flüssigkeit in der Röhre höher steigen, und, wenn man die Kugel erkältet, wieder herabsinken.

Zusatz. Flüssige Materien werden von der Wärme ausgedehnt, von der Kälte verdichtet.

§. 83.

Erklärung. Eine Röhre, wie §. 82. beschrieben worden, die oben so viel als möglich luftleer gemacht und zugeschmolzen, und mit einer Eintheilung (Scala) versehen ist, heißt ein Thermometer [Fig. 59.], und dient, die Veränderungen in der Wärme mit einander zu vergleichen, aber keinesweges sie auszumessen.

Nach der Verschiedenheit der flüssigen Masse, womit das Thermometer gefüllt ist, hat man Luft-, Weingeist- und Quecksilberthermometer.

§. 84.

Erfahrung. Man hat an dem Thermometer drey unveränderliche Puncte für drey bestimmte Temperaturen gefunden: den **natürlichen Eispunct**, in aufthauendem Schnee oder eben gefrierendem Wasser; den **künstlichen Eispunct**, in Schnee und Salmiak zu gleichen Theilen gemischt; den **Siedepunct**, in siedendem Wasser bey 27 Pariser Zoll Barometerhöhe.

Zusatz. Das Fahrenheitische Thermometer, von D. G. Fahrenheit, einem Künstler aus Danzig zu Anfange des achtzehnten Jahrhunderts, ist mit Quecksilber gefüllt, und hat vom künstlichen Eispuncte bis zum Siedepuncte 212 gleiche Theile [Fig. 59. Scala F]; weil Fahrenheit gefunden, wenn er den Raum, den die ganze Masse des Quecksilbers bis zum künstlichen Eispuncte erfüllte, in 11124 gleiche Theile theilte, dieselbe Masse bis zum Siedepuncte 11124 + 212 solcher Theile einnahm. Von diesen 212 Theilen kommen 32 für den natürlichen Eispunct, und 600 für den Punct des bis zum Kochen erhitzten Quecksilbers.

Das Reaumursche Thermometer, von M. de Réaumur im Jahr 1730. zuerst angegeben, ist mit verdünntem Weingeiste gefüllt, und hat vom natürlichen Eispuncte bis zum Siedepuncte 80 gleiche Theile [Fig. 59. Scala R]; weil Reaumur gefunden, wenn er den Raum, den die ganze Masse des Weingeistes bis zum natürlichen Eispuncte erfüllte, in 1000 gleiche Theile theilte, dieselbe Masse bis zum Siedepuncte 1000 + 80 solcher Theile einnahm.

Man nennt aber auch jetzt gewöhnlich ein Quecksilberthermometer, mit der Reaumurschen Scala versehen, ein Reaumursches Thermometer, ohnerachtet dieß erst von de Luc eingeführt worden ist.

Anmerkung I. Nennt man für zwey verschiedne Scalen (man hat auch noch andere, z. B. von de l'Isle, Celsius rc.) die Anzahl der Grade, die der ganze Fundamentalabstand enthält, A, a; die Zahlen, so bey den natürlichen Eispuncten stehen, E, e; die Zahlen bey zwey andern übereinstim-

menden Puncten X, x: so gilt für alle Skalen folgende Proportion, A : a = X — E : x — e

also $X = \frac{A}{a}(x - e) + E$,

und $x = \frac{a}{A}(X - E) + e$, wo abwärts gezählte Grade durch negative Zahlen angedeutet werden.

Wenn nun F, R übereinstimmende Grade auf Fahrenheits und Reaumurs Scalen bedeuten: so findet man aus den allgemeinen Formeln, wenn man für Fahrenheit, A = 180, E = 32, X = F; für Reaumur, a = 80, e = 0, x = R sezt:

$$F = \tfrac{9}{4} R + 32 \text{ und}$$
$$R = \tfrac{4}{9}(F - 32).$$

Beyspiel. Also sind 50 Grade Fahrenheit nach Reaumur $= R = \frac{4}{9}(50 - 32) = \frac{4 \cdot 18}{9} = 8$ Grade; und 28 Reaumursche Grade $= F = \frac{9}{4} \cdot 28 + 32 = 63 + 32 = 95$ Fahrenheitsche Grade.

Anmerkung II. Die Instrumente, mittelst welchen man die Ausdehnung fester Körper, vorzüglich der Metalle, bey der Wärme beobachtet, heißen **Metallthermometer** oder **Pyrometer**. Um die Veränderungen wegen der Dichte der Luft zu bestimmen, hat man das **Manometer**, und bey den Beobachtungen, um den Grad der Feuchtigkeit der Luft anzugeben, das **Hygrometer**.

Ein Werkzeug, um die Richtung des Windes anzugeben, heißt ein **Anemoskop**, von dem das einfachste die gemeine Wetterfahne auf Gebäuden ist, und ein Werkzeug, welches die Stärke und Geschwindigkeit des Windes angeben soll, nennt man einen **Windmesser**, **Anemometer**.

Erster Anhang.

Höhenmessen mit dem Barometer.

§. 85.

Lehrsaz. Die Gewichte der über einander liegenden Luftsäulen machen eine abnehmende (geometrische) Reihe aus, vorausgesezt, daß die Elasticitäten der Luft den Dichtigkeiten proportional sind.

Beweis. Man denke sich eine Luftsäule, die von der Erdoberfläche A [Fig. 60.] bis ans Ende der Atmosphäre Z sich erstreckt, in lauter so niedrige Schichten von gleichen Höhen AB = BC = CD ꝛc. getheilt, daß man in jeder die Luft von gleichförmiger Dichtigkeit ohne merklichen Fehler annehmen könne. Man bezeichne die Dichtigkeiten dieser Luftschichten nach der Ordnung von unten an durch $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ꝛc., ihre Gewichte aber durch a, b, c, endlich die Gewichte der Luftsäulen

AZ, BZ, CZ, DZ ꝛc. MZ, . . . NZ durch
α, β, γ, δ, μ, ν

Da alle Luftschichten von gleichem Rauminhalt sind: so verhalten sich ihre Gewichte wie ihre Dichtigkeiten [§. 8. Zus. I.], diese aber nach dem Mariottischen Gesetze [§. 76.] wie die Gewichte der auf ihnen ruhenden Luftsäulen, welche sich also auch wie die Gewichte der Luftschichten verhalten müssen. Hiernach ist

$$a:b:c \ldots = \mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c} \ldots$$
$$\text{und } \mathfrak{a}:\mathfrak{b}:\mathfrak{c} \ldots = \beta:\gamma:\delta \ldots$$

$$\text{folglich } a:b:c \ldots = \beta:\gamma:\delta \ldots$$

Nun ist offenbar $a = \alpha - \beta$, $b = \beta - \gamma$, $c = \gamma - \delta$ ꝛc. Folglich ist

$\alpha - \beta : \beta - \gamma : \gamma - \delta \ldots = \beta : \gamma : \delta \ldots$ oder

$\alpha - \beta : \beta = \beta - \gamma : \gamma$ und $\beta - \gamma : \gamma = \gamma - \delta : \delta$, oder

---

$\alpha - \beta + \beta : \beta = \beta - \gamma + \gamma : \gamma$, und $\beta - \gamma + \gamma : \gamma = \gamma - \delta + \delta : \delta$

d. i. $\alpha : \beta = \beta : \gamma$, und $\beta : \gamma = \gamma : \delta$,

folglich $\alpha : \beta = \beta : \gamma = \gamma : \delta \ldots$

Zusatz I. Da ein Barometer, mit welchem man von unten nach oben durch die Atmosphäre in die Höhe steigt, in jeder Luftschicht den Druck angibt, den alle obere Luftschichten auf das Quecksilber ausüben, also die Luftsäulen durch die Barometerhöhen abgewogen werden: so sind auch die den Luftsäulen

zugehörigen Barometerhöhen in einer abnehmenden Progression, so daß also auch durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu$ die den Luftsäulen AZ, BZ, CZ ... MZ, NZ zugehörigen Barometerhöhen verstanden werden können.

Zusatz II. Ist A [Fig. 60.] der tiefste Punct auf der Erdoberfläche, so wird für AB = BC = CD ꝛc. = 1,

die Höhe AB einmal,
" " AC zweymal,
" " AD dreymal ꝛc.
" " AM mmal,
" " AN nmal über A = 0 erhaben seyn,

und es gehört demnach

zur Höhe	A = 0,	die Barometerhöhe		α
" "	AB = 1,	"	"	β
" "	AC = 2,	"	"	γ
" "	AD = 3,	"	"	δ
" "	AM = m,	"	"	μ
" "	AN = n,	"	"	ν

Nun verhält sich aber $\alpha : \beta = \alpha : \beta$

$\beta : \gamma = \alpha : \beta$,

also $\alpha : \gamma = \alpha^2 : \beta^2$,

ferner $\gamma : \delta = \alpha : \beta$.

Folglich $\alpha : \delta = \alpha^3 : \beta^3$ ꝛc.

Allgemein daher

$$\alpha : \mu = \alpha^m : \beta^m, \text{ und } \alpha : \nu = \alpha^n : \beta^n.$$

Weil nun

$\alpha : \mu = \alpha^m : \beta^m$ und $\alpha : \nu = \alpha^n : \beta^n$,

so ist $\frac{\alpha}{\mu} = \frac{\alpha^m}{\beta^m} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m$, und $\frac{\alpha}{\nu} = \frac{\alpha^n}{\beta^n} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$,

und demnach

$$\log\frac{\alpha}{\mu} = m \cdot \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right), \text{ und } \log\frac{\alpha}{\nu} = n \cdot \log\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

[Geom. §. 63. Zus. II.].

Daher verhalten sich

$$m : n = \log\frac{\alpha}{\mu} : \log\frac{\alpha}{\nu},$$

d. h. an der Erdoberfläche verhalten sich zwey senkrechte Höhen gegen einander wie die Logarithmen derjenigen Quotienten, welche man einzeln erhält, wenn man die Barometerhöhe an der tiefsten Stelle der Erdoberfläche durch die Barometerhöhe dividirt, welche auf jeder einzeln senkrechten Höhe beobachtet wird.

Zusatz III. Nimmt man die mittlere Barometerhöhe an der Meeresfläche = 28 Pariser Zolle (an den Küsten Frankreichs, Italiens, Englands ꝛc. beträgt sie nach Beobachtungen 28", 2"', 2 Par. Maß bey 10° R., und 28", 1"', 42 bey 0° Wärme des Quecksilbers; unter dem Aequator nach Hrn. v. Humboldt 28", 1"', 02 bey 10° R.) an, also α = 28" = 336"', und nimmt nach den bisherigen Beobachtungen an, daß in der Höhe = m = 77,67 Pariser Fuß = 12,945 Toisen (6 Pariser Fuß = 1 Toise) über der Meeresfläche das Barometer um 1 Linie sinke, also in m die Barometerhöhe = 335"', oder μ = 335"' sey, aber in n = ν"' gefunden werde: so ist

$$\log \tfrac{336}{335} : \log \tfrac{336}{\nu} = 12{,}945 : \mathrm{n}$$

$$\text{oder } \log \tfrac{336}{335} : 12{,}945 = \log \tfrac{336}{\nu} : \mathrm{n}.$$

Nun ist das erste Verhältniß 0,0012945 : 12,945 = 1,2945 : 12945 = 12945 : 129450000 = 1 : 10000. Folglich ist 1 : 10000 = $\log \frac{336}{\nu}$: n, und daher n = 10000 · $\log \frac{336}{\nu}$ = 10000 · (log 336"' — log ν"')

d. h. man findet die Höhe eines Ortes über der Meeresfläche in Toisen, wenn man von dem Logarithmen der Barometerhöhe an der Meeresfläche den Logarithmen der Barometerhöhe des Ortes subtrahirt, und diese Differenz mit 10000 multipliciret.

Beyspiel. Nach den 25jährigen Beobachtungen des Hrn. Berghauptmanns von Charpentier ist in Freyberg der mittlere Barometerstand = 26", 6"', 2 = 318"', 2 Pariser Maß. Demnach läge Freyberg über der Meeresfläche

$$\begin{aligned} \mathrm{n} &= 10000\,(\log 316 - \log 318{,}2) \\ &= 10000\,(2{,}52634 - 2{,}50270) \\ &= 10000 \cdot 0{,}02364 = 236{,}4 \text{ Toisen} \\ &= \frac{6 \cdot 236{,}4 \cdot 144}{125{,}1} = 1630 \text{ Leipziger Fuß [§. 75.*].} \end{aligned}$$

Zusatz IV. Nennt man die Höhe eines Ortes über der Meeresfläche = n', die an demselben beobachtete Barometerhöhe, in Linien ausgedrückt, = ν', die Höhe eines tiefern Ortes über der Meeresfläche = n, und die daselbst beobachtete Barometerhöhe, ebenfalls in Linien ausgedrückt, = ν, ferner die Zahl 10000 = a: so ist die Höhe des erstern oder höhern Ortes über der Meeresfläche = n' = a (log 336 — log ν'), und die Höhe des zweyten oder tiefern Ortes über der Meeresfläche oder = n = a (log 336 — log ν). Demnach die Höhe beyder Orte über einander oder

$$H = n' - n = a\,(\log 336 - \log \nu') - a\,(\log 336 - \log \nu)$$
$$= a\,[(\log 336 - \log \nu') - (\log 336 - \log \nu)]$$
$$= a\,(\log \nu - \log \nu') = 10000\,(\log \nu - \log \nu');$$

d. h. man findet die Höhe zweyer Orte über einander in Toisen, wenn man den Logarithmen der kleinern Barometerhöhe von dem Logarithmen der größern Barometerhöhe subtrahirt, und diese Differenz mit 10000 multiplicirt.

Zusatz V. Bey der eben gefundnen und sehr einfachen Formel Halley's, nämlich $H = 10000 \cdot (\log \nu - \log \nu') = 10000 \cdot \log \frac{\nu}{\nu'}$ Toisen $= 60000 \cdot \log \frac{\nu}{\nu'}$ Pariser Fuß, ist vorausgesetzt: daß erstens die an beyden Stationen beobachteten Barometerhöhen auf einerley Wärme des Quecksilbers reduciret seyn, wobey man nach Beobachtungen bey 10 Grad nach Reaumur die Ausdehnung des Quecksilbers für jeden Grad Wärme $= \frac{1}{4330}$ annimmt; und daß zweytens die ganze Luftsäule zwischen beyden Stationen eine Wärme von $16\frac{3}{4}$ Grad nach dem Reaum. Thermometer hat. Da nun vorzüglich letztres selten der Fall ist: so nimmt man, da die Wärme beym Ansteigen in der Atmosphäre in der Regel in demselben Verhältniß abnimmt, als man höher steigt, das Mittel aus der Wärme an der untern und der obern Station für die gleichförmige Wärme der ganzen Luftsäule, und zieht für jeden Grad Reaum., um welchen das Mittel aus der Lufttemperatur an beyden Stationen kleiner als $16\frac{3}{4}$° R. ist, den 215ten Theil von der gefundnen Höhe = H ab, und setzt für jeden Grad, um den sie höher als die Temperatur von $16\frac{3}{4}$° R. ist, den 215ten Theil der berechneten Höhe hinzu, weil de Luc bey $16\frac{3}{4}$° Reaum. die Ausdehnung der Luft für jeden Grad R. $= \frac{1}{215}$ gefunden hat. Dieß ist de Luc's Regel, welche auf viele Vergleichungen mit nivellirten Höhen und auf sehr sorgfältige Beobachtungen gegründet ist, jedoch immer etwas von der Genauigkeit abweichen und die Höhenunterschiede um etwa $\frac{1}{50}$ irrig angeben soll; Trembley und A. und zuletzt la Place, Ramond und d'Aubuisson haben die Formel de Luc's verändert und verbessert, wo die von d'Aubuisson eine der vorzüglichsten und folgende ist. Nennt man

t = die Temperatur der Luft am untern Standpunct,
t' = die Temperatur der Luft an dem obern Stationspunct, welche Temperaturen man an jedem Beobachtungsorte

durch ein in der Luft frey hängendes Thermometer beobachtet. Ferner

$T =$ die Temperatur der Quecksilbersäule am untern Standpunct,

$T' =$ die Temperatur der Quecksilbersäule am obern Standpuncte, welche Temperaturen durch ein auf dem Brete des Barometers angebrachtes Thermometer beobachtet werden, weil sich die Temperatur des Bretes der Quecksilbersäule mittheilt. Nennt man ferner

$H =$ die Höhe der Quecksilbersäule im untern Standpuncte,

$h =$ die Höhe der Quecksilbersäule am obern Standpunct, und

$x =$ die gesuchte Höhe in Fussen: so ist [Zus. III.]

$$x = 56372{,}4 \cdot \left[[1 + 0{,}0025\,(t + t')] \cdot [\log H - \log (h \cdot [1 + \frac{T - T'}{4330}])] \right]$$

Pariser Fusse. Oder nennt man die Ausdrücke $h \cdot (1 + \frac{T - T'}{4330}) = h'$; $1 + 0{,}0025 \cdot (t + t') = m$: so ist

1) $x = 56372{,}4 \cdot m \cdot (\log H - \log h')$ Pariser Fusse, und

2) $x = 64889{,}2 \cdot m \cdot (\log H - \log h')$ Leipziger Fusse.

Anmerkung 1. Es ist $\log 56372{,}4 = 4{,}7510671$, $\log 64889{,}2 = 4{,}8121723$, $\log 0{,}0025 = 0{,}3979400 - 3$, und $\log 4330 = 3{,}6364879$.

Beyspiel I. Frankenberg, den 10. April 1817. Mittags 11 Uhr, schwacher Ostwind. Der Himmel wenig bewölkt.

Barometer.	Thermometer.	
	Am Barometer	Im Freyen
Obrer Stand $= h = 27''$, $3'''$, $65 = 327'''$, 65	$= T'$ $+7°$ R	$= t'$ $+4°$ R
Untrer Stand $= H = 27''$, $8'''$, $29 = 332'''$, 29	$= T$ $+8°$ R	$= t$ $+4°, 5$ R

Berechnung. Es ist $h' = 327{,}65 \cdot (1 + \frac{8-7}{4330}) = 327{,}65 \cdot (1 + 0{,}000231) = 327{,}65 \cdot 1{,}000231$; daher $\log h' = \log 327{,}65 + \log 1{,}000231 = 2{,}51542 + 0{,}00010 = 2{,}51552$. Ferner ist
$m = 1 + 0{,}0025 \cdot (4 + 4{,}5) = 1 + 0{,}0025 \cdot 8{,}5 = 1{,}02125$.
Demnach die Höhe des Frankenberges $= x =$
$56372{,}4 \cdot 1{,}02125 \cdot (\log 332{,}29 - \log h') =$
$56372{,}4 \cdot 1{,}02125 \cdot (2{,}52152 - 2{,}51552) =$
$56372{,}4 \cdot 1{,}02125 \cdot 0{,}00600 = 345{,}43$ Pariser Fuß, oder
$= 64889{,}2 \cdot 1{,}02125 \cdot 0{,}00600 = 397{,}52$ Leipziger Fuß.

Beyspiel II. Den 3. August 1787. beobachtete Hr. von Saussure auf der Spitze des Montblanc das Barometer des Mittags um 12 Uhr, und fand, daß es auf $16''$, $0'''$, 3

= 192''', 3 stand. Die Wärme des Quecksilbers war + 1°, 2 R. Die Temperatur der freyen Luft − 2°, 3 R.

Zu gleicher Zeit stand das Barometer im Cabinette des Hrn. Senebier zu Genf auf 27'', 3''', 1 = 327''', 1. Die Wärme des Quecksilbers war + 19°, 2 R, und die Wärme der freyen Luft + 22°, 6 R.

Das Cabinett des Hrn. Senebier lag 78 Pariser Fuß über dem Genfer See.

Berechnung. Es ist $\log h' = \log [192,3 \cdot (1 + \frac{18}{4330})]$
$= \log (192,3 \cdot 1,004157) = 2,28579$.

Ferner ist $m = 1 + 0,0025 \cdot 20,3 = 1,05075$, daher

$$x = 56372,4 \cdot 1,05075 \cdot (\log 327,1 - \log h')$$
$$= 56372,4 \cdot 1,05075 \cdot (2,51468 - 2,28579)$$
$$= 56372,4 \cdot 1,05075 \cdot 0,22889 = 13557 \text{ Fuß}.$$

Folglich wäre die Spitze des Montblanc über dem Genfer See = 13537 + 78 = 13635 Pariser Fuß erhaben.

Anmerkung II. Seit einigen Jahren sind von Mehrern barometrische Tafeln berechnet worden, welche die Berechnung der Höhen beym Höhenmessen mit dem Barometer oder die Barometermessung sehr erleichtern. Zu den vorzüglichsten gehören jetzt folgende:

Vollständiges Handbuch der angewandten Geometrie ꝛc. von D. J. F. Benzenberg, Düsseldorf 1813. S. 495. ꝛc.

Tabellen für barometrische Höhenmessungen ꝛc. von C. Garthe, Gießen 1817. 12.

Zur Vervollständigung dieser letztern Tafeln gehört noch die Tafel aus Hrn. Benzenbergs prakt. Geom. S. 509. für die Schwereabnahme in senkrechter Richtung, nämlich

Tafel

über die Verbesserung wegen Abnahme der Schwere in senkrechter Richtung bey folgenden Höhen.

Höhe.	Berichtig.	Höhe.	Berichtig.
1000 Fuß,	2,5 Fuß.	11000 Fuß,	33,5 Fuß.
2000 =	4,9 =	12000 =	38,3 =
3000 =	8,0 =	13000 =	41,0 =
4000 =	10,6 =	14000 =	44,5 =
5000 =	14,2 =	15000 =	48,5 =
6000 =	17,8 =	16000 =	53,0 =
7000 =	20,5 =	17000 =	57,2 =
8000 =	24,3 =	18000 =	61,5 =
9000 =	27,3 =	19000 =	65,7 =
10000 =	30,1 =	20000 =	70,4 =

Addirt man nach dieser Tafel in vorigem Beyspiel II. zu der berechneten Höhe von 13557 Fuß noch 43 Fuß hinzu, so wäre die Höhe des Montblanc über den Genfer See = 13557 + 43 + 78 = 13678 Pariser Fuß. Die trigonom. Messung von Hrn. Prof. Tralles gibt 13659 Fuß.

Zweyter Anhang.
Von der Elasticität der Wasserdämpfe.

§. 86.

Versuch. Das elastische Fluidum, welches sich bey dem Kochen des Wassers bildet, und sich mit der Luft, in der es sich erhebt, vermischet, erfüllet seinen Raum mit Stetigkeit, wie die Luft, und kann dieselbe sogar aus ihrer Stelle verdrängen, wenn es durch die Wärme eine hinlängliche Spannkraft erlangt hat. Dieses beweiset der folgende Versuch, welcher zugleich über die Elasticität der Wasserdämpfe bey verschiednen Temperaturen Belehrung gibt. ABDC [Fig. 61.] ist ein gläsernes Gefäß von ähnlicher Gestalt mit dem Barometer, die Röhre AB muß höher als die Quecksilberbarometer-Höhe, nämlich 30 bis 40 Zoll seyn, bey D befindet sich ein Cylinder, dessen Raum doppelt so groß als der Raum der Röhre von A bis B ist, und über demselben ist eine etwas weitere Kugel DC angeblasen, durch deren Oeffnung die Röhre AB und der Cylinder D mit Quecksilber gefüllt und durch Auskochen gehörig von Luft gereiniget werden. Hierauf bringt man in die Kugel C etwas destillirtes Wasser, und zieht die Oeffnung in eine noch offene Spitze E aus. Lässet man nun das Wasser eine Zeit lang kochen, verschließet die Spitze E mit etwas Wachs, und schmelzt sie hierauf an einer Lampe mittelst des Löthrohrs zu, so erhält man in der Kugel einen luftleeren, mit Wasserdämpfen angefüllten Raum. So lange die Temperatur der Dämpfe der Hitze des kochenden Wassers gleich kommt, ist die Quecksilbersäule HG, die durch die

Elasticität der Dämpfe erhalten wird, der Barometerhöhe von 28 Pariser Zollen gleich, so wie aber die Temperatur kälter wird, so zersetzen sich die Dämpfe immer mehr, und die Elasticität der zurückbleibenden Dämpfe wird geringer, bis sie bey sehr niedrigen Temperaturen unter dem Eispuncte beynahe verschwindet. Nach den vom Hrn. Prof. Schmidt in Gießen angestellten Versuchen über die Expansivkraft der Wasserdämpfe bey verschiednen Temperaturen ergeben sich, wenn man die Temperaturen nach dem 80theiligen Thermometer, die Elasticitäten der Dämpfe durch Quecksilbersäulen in Pariser Zollen ausgedrückt misset, im Mittel folgende Werthe für die Elasticitäten der Wasserdämpfe.

Temperatur nach Reaumur.	Elasticität des Wasserdampfes.	Temperatur nach Reaumur.	Elasticität des Wasserdampfes.
— 5°	0,090	55°	8,650
0	0,180	60	11,080
+ 5	0,236	65	14,170
10	0,400	70	17,883
15	0,680	75	22,390
20	0,997	80	28,000
25	1,400	85	35,090
30	1,962	90	43,770
35	2,684	95	54,180
40	3,672	100	67,000
45	5,040	105	80,950
50	6,435	110	100,720

Anmerkung I. Hr. Professor Mayer zu Göttingen hat in einer der königl. Societät der Wissenschaften vorgelesenen Abhandlung de lege vis elasticae vaporum (1809.) folgende Formel für die Elasticität der Wasserdämpfe gegeben, welche den ganzen Umfang der Beobachtungen von Hrn. Prof. Schmidt gut darstellet. Nach dieser ist

$$\log e = 4{,}2860 + \log (213 + t) - \frac{1551{,}09}{213 + t},$$

wo e die Elasticität der Dämpfe durch eine Quecksilbersäule

in Pariser Zollen, und t die Temperatur nach Reaumur bedeutet.

Beyspiel. Bey 55° Reaum. = t müßte also die Elasticität des Wasserdampfes = 8,443 Pariser Zoll betragen, weil

$$\log e = 4{,}2860 + \log(213+55) - \frac{1551{,}09}{213+55}$$
$$= 4{,}2860 + \log 268 - \frac{1551{,}09}{268}$$
$$= 4{,}2860 + 2{,}4281 - 5{,}7876$$
$$= 6{,}7141 - 5{,}7876 = 0{,}9265,$$ wozu die Zahl = 8,443 gehört, welches mit den Versuchen in der Tabelle ziemlich übereinstimmt.

Anmerkung II. Da man, vermöge des angeführten Versuches, durch die Dämpfe des kochenden Wassers einen Raum von Luft ausleeren kann, die Dämpfe selbst aber sich durch eine kältere Temperatur größtentheils wieder zersetzen, und einen leeren Raum zurücklassen: so beruhet hierauf, nebst dem Druck, welchen wegen der Elasticität die Wasserdämpfe gegen eine Fläche ausüben, die Wirkung der Dampf- oder Feuermaschinen, deren man sich mit so vielem Vortheile bedient, um dadurch Mühlwerke, hydräulische und andere Maschinen in Bewegung zu setzen.

Anmerkung III. Den Druck, welchen Wasserdämpfe gegen eine Fläche ausüben, findet man daher, wenn man sich über der gedrückten Fläche eine Quecksilbersäule denkt, deren Höhe die Elasticitätshöhe der Temperatur des Wasserdampfs ist. So drücken z. B. nach der vorigen Tabelle die Wasserdämpfe bey einer Temperatur von 80° Reaum. auf eine Fläche von 1 Leipz. Quadratzoll mit einem Gewicht von $= \frac{144}{125{,}1} \cdot 28'' \cdot \frac{48{,}883}{1728} \cdot 14 = 12{,}76$ Leipz. Pfunde.

IV.

Erste Gründe der Dynamik.

§. 87.

Erklärung. Die Dynamik (sonst auch Mechanik im engern Sinne genannt) ist die Wissenschaft von den allgemeinen Gesetzen der Bewegung [§. 2.] fester Körper [§. 1. Anmerk.]. Die reine oder geometrische Lehre von der Bewegung der Körper, letztere als blose Puncte betrachtet und ohne Rücksicht auf die bewegenden Kräfte, heißt Phoronomie.

§. 88.

Erklärung. Wenn ein Körper sich bewegt, oder sich zu bewegen strebt, so muß eine Ursache vorhanden seyn, welche die Bewegung oder das Bestreben zur Bewegung hervorbringt. Diese Ursache nennt man Kraft [§. 3.], obgleich ganz allgemein jedes Vermögen zu wirken und Bewegung hervorzubringen mit dem Namen Kraft belegt

wird. Hier ist aber nur von den zuerst erwähnten Kräften die Rede.

Zusatz I. Die Kräfte selbst kennt man nur aus ihren Wirkungen, welche darin bestehen, daß sie einen Körper schnell oder langsam bewegen, oder gegen einen andern Körper, welcher die Bewegung zu hindern strebt, stärker oder schwächer pressen; und nur durch die Vergleichung solcher Wirkungen ist man im Stande, von der Größe einer Kraft zu urtheilen. Aus diesem Grunde erlaubt man sich auch den Ausdruck Kraft zu brauchen, ob man eigentlich nur von der Wirkung spricht.

Zusatz II. Befindet sich ein Körper in Ruhe, so kann man nicht einsehen, warum er ohne eine Ursache seinen Ort verändern oder sich bewegen sollte [§. 2. und 3.]; es muß daher erst eine Kraft auf ihn wirken, wenn er in Bewegung gesetzt werden soll. Und wenn ein Körper einmal in Bewegung ist, und auf seinem Wege nirgends Hindernisse antrifft, die auf seine Bewegung einen Einfluß haben: so läßt sich nicht denken, daß ohne Ursache eine Veränderung in seiner Bewegung entstehen sollte; er muß daher nach derselben Richtung und mit derselben Geschwindigkeit ohne Ende fortgehen. Dieses Gesetz, wonach Körper ihren Zustand beyzubehalten sich bestreben, heißt das Gesetz der Trägheit, oder das Beharrungsvermögen.

Zusatz III. Hat eine Kraft einen Körper in Bewegung gesetzt, so bedarf es, in so ferne keine Hindernisse vorhanden sind, welche die Bewegung aufhalten, keiner fernern Einwirkung der Kraft zur Unterhaltung der Bewegung, sondern der Körper wird wegen seiner Trägheit oder seines Beharrungsvermögens die Bewegung von selbst fortsetzen.

Erstes Kapitel.

Von der gleichförmigen Bewegung.

§. 89.

Erklärung. Durchläuft ein Körper in gleichen Zeiten gleiche Räume, so sagt man: seine

Bewegung sey gleichförmig, welches der Fall bey jedem in Bewegung gesetzten Körper ist, wenn auf denselben keine Kräfte weiter wirken.

Zusatz I. Um von der Bewegung eines Körpers zu urtheilen, muß man den Raum kennen, welchen er in einer bestimmten Zeit durchläuft. Je größer dieser Raum für einerley Zeit ist, desto geschwinder bewegt sich der Körper, und man pflegt gewöhnlich den in einer Zeitsecunde durchlaufnen Raum eines Körpers als Maß seiner Geschwindigkeit anzunehmen. Daher nennt man auch den Raum, durch welchen ein Körper in einer Zeitsecunde sich bewegt, seine Geschwindigkeit.

Zusatz II. Bewegen sich zwey Körper nach einerley geraden Linie, so kann man die Bewegung dieser Körper in Bezug auf einander untersuchen und vergleichen, wie viel sie sich in jeder Secunde einander genähert oder von einander entfernt haben. Dieser Raum wird alsdann die relative Geschwindigkeit genannt, und ist mit der absoluten Geschwindigkeit oder dem Raume nicht zu verwechseln, welchen jeder Körper für sich in jeder Secunde wirklich durchlaufen hat.

Anmerkung. Haben zwey Körper gleiche Geschwindigkeit, indem sie sich nach einerley Richtung bewegen, so ist ihre relative Geschwindigkeit = 0, obgleich ihre absolute sehr groß seyn kann.

§. 90.

Aufgabe. Bey der gleichförmigen Bewegung eines Körpers für den Raum, die Geschwindigkeit und die Zeit allgemeine Ausdrücke zu finden.

Auflösung. Man setze, daß jede Zeit jetzt und in der Folge durch Secunden, und Räume durch Fusse ausgedrückt werden, und daß S den Raum bezeichnet, welchen ein Körper in der Zeit T mit der Geschwindigkeit [§. 89. Zus. I.] C durchläuft: so verhält sich

$$1 : T = C : S,$$

woraus nachstehende drey Hauptsätze folgen:

$$1)\ S = C \cdot T$$

$$2)\ C = \frac{S}{T}$$

$$3)\ T = \frac{S}{C}$$

Beyspiel I. Ein Hundestößer stößt mit einer Geschwindigkeit von 4 Fuß einen Hund fort; wie weit wird er ihn in $1\frac{3}{4}$ Minute Zeit stoßen?

Hier ist $C = 4$ Fuß, $T = 1\frac{3}{4}$ Minuten $= 105$ Secunden, also $S = C \cdot T = 4 \cdot 105 = 420$ Fuß $= \frac{420}{7} = 60$ Lachter [s. Arithm. Beylage I.], als so weit der Hund von dem Hundestößer in dieser Zeit gestoßen wird.

Beyspiel II. An einem zweymännschen Haspel drehen die beyden Haspelknechte das Haspelhorn oder die Kurbel in der Minute 35mal um. Wenn nun die Höhe des Haspelhorns $= a =$ [CD, Fig. 31.] 18 Zoll $= 1,5$ Fuß beträgt: wie groß ist die Geschwindigkeit der Kraft der beyden Haspelknechte, oder, was dasselbe ist, mit welcher Geschwindigkeit drehen die Haspelknechte das Haspelhorn um?

In diesem Falle ist $S = 2 \cdot 1,5 \cdot 3,141 \cdot 35$ [Geom. §. 229.] $= 329,805$ Fuß, $T = 1$ Min. $= 60$ Secunden, daher drehen die Haspelknechte das Horn mit einer Geschwindigkeit $C = \frac{S}{T} = \frac{329,805}{60} = 5,49$ Fuß um.

Beyspiel III. Wenn nach dem vorigen Beyspiel außer dem schon gegebnen noch die Entfernung der Last von der Axe des Rundbaums $= b = 4$ Zoll betrüge, und der Schacht 6 Fahrten oder 144 Fuß tief wäre: in welcher Zeit würde der Kübel vom Füllort an die Hängebank von den beyden Haspelknechten gebracht werden?

In dem hier angenommenen Falle wäre nach §. 40. Zus. II., wenn die Geschwindigkeit der Kraft $= C = 5,49$ Fuß ist, die Geschwindigkeit der Last oder $C' = \frac{b}{a} \cdot C = \frac{4}{18} \cdot 5,49 = 1,22$ Fuß, $S = 144$ Fuß. Demnach würde der Kübel von den beyden Haspelknechten vom Füllort bis an die Hängebank in $T = \frac{S}{C'} = \frac{144}{1,22} = 118$ Secunden $= 1$ Minute 58 Secunden gezogen.

Zusatz. Nach dem Ausdrucke $S = C \cdot T$ lässt sich der mit gleichförmiger Bewegung beschriebne Raum eines Körpers durch das Product der Geschwindigkeit und Zeit, folglich durch ein Rectangel QAPR [Tab. I. Fig. 2.] $= AQ \cdot AP$ [Geom. §. 219.], dessen Seiten die Geschwindigkeit $AQ = C$, und Zeit $AP = T$ angeben, ausmessen. Es ist demnach jeder beschriebne Raum S die Summe der in den gleichen Theilen der Zeit T erlangten Geschwindigkeiten C.

§. 91.

Erklärung. Wird ein Körper blos von einer Kraft bewegt, so heißt die hieraus entstehende Bewegung eine einfache; wird der Körper aber von zwey oder mehrern Kräften, deren Richtungen Winkel einschließen, zugleich getrieben, so entsteht eine zusammengesetzte oder mittlere Bewegung.

§. 92.

Aufgabe. Zwey Bewegungen, deren Richtungen AQ, AP [Tab. I. Fig. 3.] in einem Puncte A zusammenlaufen, und einen Winkel QAP bilden, in eine zusammenzusetzen, wenn AQ, AP zugleich die Verhältnisse der Bewegungen oder der Geschwindigkeiten sind; und umgekehrt, eine Bewegung in zwey Seitenbewegungen

zu zerlegen, wenn die Richtungen dieser letztern gegeben sind.

Auflösung und Beweis. Aus QAP vollende man das Parallelogramm QAPR: so sind AQ und AP in der Diagonale AR vereinigt.

Denn, wenn ein Körper in A nur von einer Kraft nach AQ getrieben würde, so müßte er binnen einer gewissen Zeit den Weg AQ zurückgelegt haben. Da er nun aber auch zugleich von einer zweyten Kraft in A getrieben wird, welche ihn nöthigt, in derselben Zeit nach der Richtung AP den Weg AP zurückzulegen: so wird der Körper in derselben Zeit um den Weg AP ⫫ QR von AQ abgelenkt, und er muß daher in R seyn. Daher die Diagonale AR die Richtung und Größe der mittleren Bewegung oder Geschwindigkeit ist.

Will man umgekehrt eine Geschwindigkeit AR in zwey Seitengeschwindigkeiten zerlegen, so beschreibe man um AR, als einer Diagonale, ein beliebiges Parallelogramm QAPR, wenn nicht schon eine Seitenrichtung oder beyde bestimmt sind; so ist die Bewegung oder Geschwindigkeit AR in die beyden Seitenbewegungen oder Seitengeschwindigkeiten AQ, AP zerlegt.

Zusatz I. Was in der Statik §. 15. 16. das Parallelogramm der Kräfte ist, ist hier das Parallelogramm der Geschwindigkeiten, und die Zusätze I. II. des §. 16. können hier für Geschwindigkeiten gelten, wie sie dort für Kräfte galten.

Zusatz II. Bewegt sich ein Körper nach AB [Tab. V. Fig. 62.] mit der Geschwindigkeit = C, und trifft in B ein Hinderniß unter einem Winkel ABG = α: so wird er durch diese plötzliche Ablenkung von seiner ursprünglichen Richtung einen Theil seiner Geschwindigkeit verlieren. Man nehme BE = C, und zeichne das Rectangel BFED, so wird die Geschwindigkeit BE in zwey Seitengeschwindigkeiten BF = DE, und

BD = FE zerlegt, wovon die auf GD normale Geschwindigkeit BF vom Hinderniß DG aufgehoben wird, und der Körper behält nur noch, nach der Richtung BD, die Geschwindigkeit $BD = BE \cdot \cos\alpha = C \cdot \cos\alpha$.

Weil $\cos\alpha = 1 - \sin vers\,\alpha$ [Geom. §. 244. für $r = 1$], so ist $BD = C\,(1 - \sin vers\,\alpha) = C - C \cdot \sin vers\,\alpha$; folglich hat der Körper durch die Ablenkung von seiner Bahn einen Theil $C \cdot \sin vers\,\alpha$ von seiner Geschwindigkeit verloren.

Zusatz III. Trifft der Körper in seiner Bahn von A nach B in B auf ein Hinderniß, welches ihn nöthigt, die krumme Linie BC [Fig. 63.], die seine vorige Richtung AB in B tangentirt, zu durchlaufen: so wird in diesem Falle keine Verminderung der Geschwindigkeit Statt finden, weil $\alpha = 0$, also $\sin vers\,\alpha = 0$ ist.

Zweytes Kapitel.

Von der beschleunigten Bewegung und dem freyen Falle der Körper.

§. 93.

Erklärung. Wenn ein Körper sich so bewegt, daß er in allen auch noch so kleinen gleich großen Zeittheilchen gleich viel Zusatz an Geschwindigkeit erhält, so heißt dieß eine gleichförmig beschleunigte Bewegung; eine ungleichförmig beschleunigte Bewegung hingegen nennt man diejenige, bey welcher die Zunahme der Geschwindigkeit in gleichen Zeiten nicht gleich groß ist.

Ist die Bewegung eines Körpers so beschaffen, daß er in gleichen Zeiten gleich viel an seiner Geschwindigkeit verliert, so ist dieses eine gleichförmig verminderte Bewegung, die noch ungleich-

förmig genannt wird, wenn in gleichen Zeiten ungleich viel an Geschwindigkeit abgeht.

§. 94.

Grundsatz. Bey der gleichförmig beschleunigten Bewegung verhalten sich die vom Anfange der Bewegung an verfloßnen Zeiten, wie die am Ende derselben erlangten Geschwindigkeiten.

§. 95.

Erklärung. Eine Kraft, welche fortwährend und überall gleich stark auf einen Körper wirkt, er mag ruhen, sich schnell oder langsam bewegen, heißt eine beständige oder absolute Kraft. Wirkt sie hingegen anders auf einen ruhenden, und anders auf einen bewegten Körper: so heißt sie eine veränderliche oder relative Kraft.

Zusatz. Eine jede beständige Kraft, welche auf einen bewegten Körper wirkt, verursacht eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, weil sie den Körper immer mit gleicher Stärke fortzutreiben strebt, und ihm dadurch in gleichen Zeiten gleichen Zusatz an Geschwindigkeit mittheilt. Da nun die Schwerkraft [§. 7.] auf jedes einzelne Theilchen einer Masse zu allen Zeiten gleich stark wirkt, so ist für die Körper nahe an der Erdoberfläche die Schwerkraft eine beständige Kraft.

§. 96.

Lehrsatz. Die Räume, welche ein Körper bey einer gleichförmig beschleunigten Bewegung beschreibt, verhalten sich wie die Quadrate der Zeiten.

Beweis. Es sey BF [Fig. 64.] die Geschwindigkeit, welche der gleichförmig beschleunigte Körper in der Zeit AB erlangt, so wird der Körper

in der doppelten Zeit AC = 2AB die (mit BF parallele) Geschwindigkeit CG = 2BF, in der dreyfachen Zeit AD = 3AB die Geschwindigkeit DH = 3BF, in der vierfachen Zeit AE = 4AB die Geschwindigkeit EK = 4BF, ꝛc. erlangen [§. 94.]. Da nun jeder in einer gewissen Zeit beschriebne Raum als die Summe der in dieser Zeit erlangten Geschwindigkeiten angesehen werden kann [§. 90. Zus.], und die Verhältnisse der Summen der Geschwindigkeiten daher durch die Triangel ABF, ACG, ADH, AEK ꝛc. ausgedrückt werden, nämlich das Verhältniß des durchlaufnen Raums in der

1fachen Zeit AB durch $\Delta ABF = 1 \cdot \Delta ABF = 1^2 \cdot \Delta ABF$,
2fachen „ AC „ $\Delta ACG = 4 \cdot \Delta ABF = 2^2 \cdot \Delta ABF$,
3fachen „ AD „ $\Delta ADH = 9 \cdot \Delta ABF = 3^2 \cdot \Delta ABF$,
4fachen „ AE „ $\Delta AEK = 16 \cdot \Delta ABF = 4^2 \cdot \Delta ABF$
u. s. w.

dargestellt wird, indem die sämmtlichen punctirten Triangel congruent sind: so verhalten sich demnach bey einer **gleichförmig beschleunigten Bewegung die durchlaufnen Räume wie die Quadrate der Zeiten.**

Zusatz I. Nennt man daher bey der gleichförmig beschleunigten Bewegung die in den Zeiten t und T durchlaufnen Räume s und S, so verhalten sich

$$1)\ s : S = t^2 : T^2$$

Heißen ferner c und C die am Ende der Zeiten t und T erlangten Geschwindigkeiten, so ist auch, weil $t : T = c : C$ [§. 94.],

$$2)\ s : S = c^2 : C^2,$$

d. h. die von einem Körper mit gleichförmig beschleunigter Bewegung durchlaufnen Räume verhalten sich auch wie die Quadrate der am Ende der Zeiten erlangten Geschwindigkeiten.

Zusatz II. Ist AD = t [Fig. 64.] eine beliebige Zeit, DH die am Ende dieser Zeit t von einem sich mit gleichförmig beschleunigter Bewegung bewegten Körper erlangte Geschwindigkeit = c: so wird durch den △ADH ein Ausdruck für den Raum = s dargestellt [§. 90. Zus.], welcher von dem Körper mit einer gleichförmig beschleunigten Bewegung durchlaufen worden. Da nämlich △ADH = $\frac{AD \cdot DH}{2}$ [Geom. §. 221.]: so ist s = $\frac{c \cdot t}{2}$, und daher 2s = c·t; d. h. bewegte sich ein gleichförmig beschleunigter Körper gleich vom Anfange an gleichförmig mit der am Ende einer gewissen Zeit = t erlangten Geschwindigkeit = c: so würde er einen doppelt so großen Raum durchlaufen.

Zusatz III. In so fern man die Schwerkraft als eine beständige Kraft [§. 95. Zus.] ansehen kann, so gelten auch von ihr die vorhin erwiesnen Sätze.

§. 97.

Erfahrung. Durch Versuche hat man gefunden, daß ein Körper in unsern Gegenden in der ersten Secunde unsrer Uhrzeit durch 15,1 Pariser oder durch 15,625 Rheinländische oder durch 17,377 Leipziger Fuß senkrecht falle [s. von Busse Wassersäulenmaschine rc. §. 61.].

§. 98.

Erklärung. Den Raum, welchen ein von einer beständigen Kraft bewegter Körper in der ersten Secunde durchläuft, oder ein frey fallender Körper durchfällt, nennt man die Beschleunigung dieser Kraft, oder im zweyten Falle die Beschleunigung der Schwerkraft, oder auch die Beschleunigung des fallenden Körpers oder die Beschleunigung des verticalen Falles.

Zusatz. Für die Schwerkraft ist daher in unsern Gegenden diese Beschleunigung 15,1 Pariser oder 15,625 Rheinl. oder 17,377 Leipz. Fuß [§. 97.] rc.

§. 99.

Aufgabe. Für den freyen Fall der Körper allgemeine Ausdrücke zu finden.

Auflösung. Man setze die Höhe, von welcher ein Körper frey herunterfällt, $= h$, die Zeit des Falles $= t$, die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit $= c$, und die Höhe, welche ein Körper in der ersten Secunde frey durchfällt [§. 97.], $= g$, z. B. $= 17,377$ Leipz. Fuß oder $= 15,625$ Rheinl. Fuß: so ist nach §. 96. Zus. II.

1) $h = \frac{c \cdot t}{2}$. Nach §. 96. Zus. I. 1) verhält sich aber $1 : t^2 = g : h$, daher

2) $h = g \cdot t^2 = 17,377 \cdot t^2$ Leipz. Fuß $= 15,625 \cdot t^2$ Rheinl. Fuß.

Aus 1) folgt $t = \frac{2h}{c}$, also $t^2 = \frac{4h^2}{c^2}$, daher $h = \frac{4gh^2}{c^2}$, oder $1 = \frac{4gh}{c^2}$; dieß gibt

3) $h = \frac{c^2}{4g} = \frac{c^2}{69,508} = 0,0143 \cdot c^2$ Leipz. Fuß $= 0,016 \cdot c^2$ Rheinl. Fuß.

Nach §. 96. Zus. II. ist ferner $2s = ct$. Da nun für $t = 1$, $s = g$ wird [§. 97. und §. 98. Zus.]: so ist nach Verlauf einer Secunde die erlangte Geschwindigkeit eines frey fallenden oder sonst von einer der Schwere gleichen und beständigen Kraft bewegten Körpers $= 2g$, und es verhält sich daher $1 : t = 2g : c$ [§. 94.]. Demnach

4) $c = 2g \cdot t = 34,754 \cdot t$ Leipz. Fuß $= 31,25 \cdot t$ Rheinl. Fuß.

Aus 1) findet man

5) $c = \frac{2h}{t}$,

und aus 3)

6) $c = 2\sqrt{g \cdot h} = 8{,}337 \cdot \sqrt{h}$ Leipz. Fuß $=$ $7{,}9 \cdot \sqrt{h}$ Rheinl. Fuß.

Zur Bestimmung der Zeit t findet man aus 1)

7) $t = \frac{2h}{c}$.

und aus 2)

8) $t = \sqrt{\frac{h}{g}} = 0{,}2398 \cdot \sqrt{h}$ Leipz. Fuß $= 0{,}253$ $\cdot \sqrt{h}$ Rheinl. Fuß.

Aus 4) findet man endlich

9) $t = \frac{c}{2g} = 0{,}0287 \cdot c$ Leipz. Fuß $= 0{,}032 \cdot$ c Rheinl. Fuß.

Beyspiel I. Wenn ein Körper während 3 Secunden gefallen ist, so beträgt der durchfallne Raum nach 2) nämlich $h = 17{,}377 \cdot 3^2 = 17{,}377 \cdot 9 = 156{,}39$ Leipz. Fuß.

Beyspiel II. Am Ende seines Falles hat ein Körper eine Geschwindigkeit von 12 Fuß erlangt; es ist also seine Fallhöhe nach 3) d. i. $h = 0{,}0143 \cdot 12^2 = 0{,}0143 \cdot 144 = 2{,}05$ Leipz. Fuß.

Beyspiel III. Ein Körper, welcher während 3 Secunden fällt, erlangt nach 4) eine Geschwindigkeit von $c = 34{,}754 \cdot 3 = 104{,}26$ Leipz. Fuß.

Beyspiel IV. Wenn ein Körper 18 Zoll oder 1,5 Fuß tief fällt, so ist seine Endgeschwindigkeit nach 6) oder $c = 8{,}337 \cdot \sqrt{1{,}5} = 8{,}337 \cdot 1{,}224 = 10{,}2$ Leipziger Fuß.

Zusatz I. Fällt ein Körper in der ersten Secunde durch den Raum $= 1 \cdot g$, so fällt er nach §. 96. und 99. 2) in der zweyten Secunde durch den Raum $= 4g$, in der dritten durch $= 9g$, in der vierten durch $= 16g$, rc., woraus man leicht übersieht, daß sich die Zunahmen des Raums in gleichen Zeiten wie die ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 rc. verhalten.

Zusatz II. Wenn ein frey fallender oder ein sonst von einer der Schwere gleichen und beständigen Kraft bewegter Körper im Anfange der Zeit t' schon eine Geschwindigkeit c erlangt hat, so wird ihm die Schwerkraft oder die beständige Kraft während dieser Zeit noch die Geschwindigkeit = 2gt [§. 99.4)] mittheilen, und am Ende der Zeit t' besitzt derselbe die Geschwindigkeit

$$1)\ v = c + 2gt'.$$

Vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit durchläuft der Körper den Weg = c · t', und wegen Einwirkung der Schwerkraft in der Zeit t' den Weg = g · t'² [§. 99.2)]. Daher ist der ganze durchlaufne Raum = h' in der Zeit t'.

$$2)\ h' = ct' + gt'^2 = (c + gt') \cdot t'.$$

Hätte der Körper die Geschwindigkeit c durch den freyen Fall von der Höhe h erhalten, so wäre $h = \frac{c^2}{4g}$ [§. 99.3)], und weil nun die Geschwindigkeit v der ganzen Fallhöhe h + h' entspricht, so ist

$$3)\ v = 2\sqrt{g(h+h')}\ [§. 99.6)]$$
$$= 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{(h+h')} = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{\left(\frac{c^2}{4g} + \frac{4gh'}{4g}\right)}$$
$$= \frac{2\sqrt{g}}{2\sqrt{g}} \cdot \sqrt{(c^2 + 4gh')} = \sqrt{(c^2 + 4gh')}.$$

Drittes Kapitel.

Von der Bahn geworfner Körper.

§. 100.

Lehrsatz. Soll ein geworfner Körper eine gewisse lothrechte Höhe erreichen, so muß er mit eben der Geschwindigkeit steigen, welche er durch den freyen Fall von dieser Höhe herab erreicht hätte. Auch wird zum Steigen auf eine gewisse Höhe eben so viel Zeit erfordert, als zum freyen Fall von dieser Höhe nöthig ist.

Beweis. Denn, weil die Schwerkraft als eine beständige Kraft während des Steigens dem Körper in jedem Zeittheilchen eben so viel Geschwindigkeit raubt, wie er durch den freyen Fall erhalten würde: so folgt, daß ein Körper, um eine gewisse lothrechte Höhe zu erreichen, gleich anfänglich mit einer Geschwindigkeit aufsteigen muß, als diejenige ist, welche er durch den freyen Fall von dieser Höhe erreichen würde; oder er setzt beym Steigen nach und nach die Summe der Geschwindigkeiten wieder zu, welche er beym Fallen nach und nach erhalten hätte. Die Schwerkraft wirkt demnach hier als eine gleichförmig verzögernde Kraft [§. 93.], und die Geschwindigkeit nimmt eben so ab, wie sie beym Falle zunimmt, so daß also der Körper in einer gewissen Zeit nur diejenige Höhe erreichen kann, die er beym Fallen durchlaufen würde.

Zusatz I. Hat ein Körper eine Höhe mit verminderter Geschwindigkeit erreicht, so fällt er mit vermehrter Geschwindigkeit diese Höhe wieder herab. Beobachtet man daher die Zeit des Steigens und Fallens eines Körpers, halbirt dieselbe: so erhält man die Zeit t des Steigens, woraus man die Höhe $h = g \cdot t^2$ [§. 99. 2)] findet.

Beyspiel. Ein in die Höhe geworfner Körper steige und falle, in der Zeit von 4 Secunden: so ist die Zeit des Steigens oder des Fallens, den Widerstand der Luft bey Seite gesetzt, $= 2$ Secunden, und daher die Höhe $= 17{,}377 \cdot 2^2 = 17{,}377 \cdot 4 = 69$ Fuß.

Zusatz II. Ein Körper, der mit der Geschwindigkeit c zu steigen anfängt, erreicht also die Höhe $h = \frac{c^2}{4g}$. Ist er in der Zeit t' nur bis auf die Höhe h' gelangt, so hat er in dieser Zeit die Geschwindigkeit $2g \cdot t'$ verloren [§. 99. 4)], und seine Geschwindigkeit v ist nach Verlauf der Zeit t'

$$1) \quad v = c - 2gt'.$$

Mit dieser Geschwindigkeit würde er noch bis zur Höhe $\frac{v^2}{4g}$ steigen können [§. 100]. Zieht man diese Höhe von der ganzen Höhe h ab, so erhält man $h' = \frac{c^2}{4g} - \frac{v^2}{4g}$.

Setzt man $v = c - 2gt'$, so ist $v^2 = c^2 - 4cgt' + 4g^2t'^2$, $\frac{v^2}{4g} = \frac{c^2}{4g} - ct' + gt'^2$. Demnach

$$2)\ h' = ct' - gt'^2 = (c - gt')\,t'.$$

Beyspiel. Ein Körper steige mit einer Geschwindigkeit von 60 Fuß vertical: so wird er seine größte Höhe $h = \frac{c^2}{4g} = 0{,}0143 \cdot 60^2 = 51{,}48$ Fuß in der Zeit $t = \frac{c}{2g} = 0{,}0287 \cdot 60 = 1{,}722$ Secunden erreichen. In der Zeit von 2 Secunden wird er daher in der Höhe $h = (c - gt') \cdot t = (60 - 17{,}377 \cdot 2) \cdot 2 = 50{,}492$ Fuß sich befinden, also unter den Punct seiner größten Höhe schon um $51{,}48 - 50{,}492 = 0{,}988$ Fuß wieder gefallen seyn. In der Zeit von 3 Secunden wird er nur noch $(60 - 17{,}377 \cdot 3) \cdot 3 = 23{,}607$ Fuß hoch, und nach 4 Secunden $= (60 - 17{,}377 \cdot 4) \cdot 4 = -38$ Fuß hoch seyn, d. h. nach 4 Secunden ist der Körper 38 Fuß tiefer, als *im* Anfange seiner Auffsteigung, wenn er durch kein Hinderniß aufgehalten wird.

§. 101.

Lehnsatz und Erklärung. Eine krumme Linie AKR oder AQT [Fig. 65.], bey welcher zwey Abscissen AD, AF sich zu einander verhalten, wie die Quadrate der rechtwinklichen Ordinaten DK, FL oder DM, FQ, also $AD : AF = DK^2 : FL^2$ oder $AD : AF = DM^2 : FQ^2$, heißt eine **Parabel**. Die Linie AU', welche die Parabelfläche TMALR und die verlängerten rechtwinklichen Ordinaten MDK, QFL ꝛc. halbirt, heißt die **Axe**, und der Punct A der **Scheitel** der Parabel.

Zusatz I. Um eine Parabel zu verzeichnen, suche man zu zwey gegebnen Coordinaten AD, DK die dritte Proportionallinie DU, welche man am geschwindesten erhält, wenn man auf der geraden Linie AK die Normallinie KU errichtet,

und diese sich mit der Axe AU' schneiden lässt, indem sich nun nach Geom. §. 162. Zus. verhält AD : DK = DK : DU. Die Linie DU nennt man den Parameter der Parabel. Den vierten Theil von DU = UV trage man aus dem Scheitel A auf die verlängerte Axe in B und F, so nennt man den Punct F den Brennpunct der Parabel. Zieht man nun mit der rechtwinklichen Ordinate DK oder MDK mehrere beliebige Parallellinien QL, SP, TR ꝛc., schneidet diese zu beyden Seiten aus dem Brennpunct F mit den Halbmessern BF, BG, BH ꝛc.: so erhält man die Puncte T, S, Q, M, A, K, L, P, R, durch welche die Parabel geht, und sich aus freyer Hand verzeichnen lässt. Es gibt noch einige Methoden, die Parabel zu verzeichnen, aber gerade diese ist eine der kürzesten und leichtesten.

Zusatz II. Fällt man von einem beliebigen Punct T der Parabel eine Normallinie TH auf die Axe AU, trägt die hier zur Ordinate TH gehörige Abscisse AH aus A auf die verlängerte Axe in E, und zieht die gerade Linie TE: so ist TE eine Tangente der Parabel für den Punct T.

Zusatz III. Zieht man für irgend einen Punct z. B. T die Tangente TE, und nun durch beliebige Puncte N, N' der Tangente mit der verlängertru Axe EU die Parallellinien NM, N'M', welche die Parabel in M, M' schneiden: so lässt sich aus den Eigenschaften der Parabel darthun, daß NM : N'M' = $TN^2 : TN'^2$ ist.

Zusatz IV. Der Flächeninhalt der halben Parabelfläche ALRH ist = $\frac{2}{3} \cdot AH \cdot HR$.

Anmerkung. Den Beweis für §. 101. und dessen Zusätze gibt die höhere Geometrie.

§. 102.

Lehrsatz. Wird ein Körper nach einer nicht senkrechten Richtung, sondern nach einer Richtung, welche mit dem Horizont entweder parallel geht, oder mit dem Horizont einen spitzen Winkel macht, geworfen: so ist die Bahn des geworfenen Körpers eine Parabel, den Widerstand der Luft bey Seite gesetzt.

Beweis. Es werde ein Körper aus T [Fig. 65.] nach der Richtung TX, unter dem gegen den Horizont TR spitzen Winkel XTR $= \alpha$ geworfen, und ihm die Geschwindigkeit c mitgetheilt: so müßte er, wenn die Schwere nicht auf ihn wirkte, in der Zeit t' den Weg $ct' = TN$ zurücklegen, und sich in N befinden. Während dieser Zeit t' hat aber die Schwere auf ihn gewirkt, und ihn um den Weg $NM = gt'^2$ vertical heruntergetrieben [§. 99. 2)]; er muß daher nach Verlauf der Zeit t' im Puncte M sich befinden, da alsdenn $TN = ct'$, und $NM = gt'^2$ ist. Hieraus erhält man $t' = \frac{TN}{c}$, daher $NM = \frac{g}{c^2} \cdot TN^2$.

Auf gleiche Art findet man $N'M' = \frac{g}{c^2} \cdot TN'^2$. Und es verhält sich daher $NM : N'M' = \frac{g}{c^2} \cdot TN^2 : \frac{g}{c^2} \cdot TN'^2 = TN^2 : TN'^2$.

Nun gehört diese Gleichung nach §. 101. Zus. III. zu einer Parabel, welche in T von der Linie TX tangentirt wird, und deren Axe mit den Linien NM, N'M' parallel läuft. Es muß daher die Linie TMM', in welcher sich der geworfne Körper bewegt, eine Parabel seyn, die den Horizont TR wieder in irgend einem Punct R schneidet.

Zusatz I. Die horizontale Linie TR, welche der Körper in seiner Bahn abschneidet, heißt die Wurfweite; theilt man diese in zwey gleiche Theile in H, und zieht aus H bis an die durch T gelegte Tangente TX die rechtwinkliche Linie HE: so liegt in der Mitte A der HE der Scheitel der Parabel [§. 101. Zus. II.], und es ist AH die größte Höhe, welche der geworfne Körper erreichen kann.

Zusatz II. Man setze die Wurfweite $TR = w$, die größte dazu gehörige Höhe $HA = h$, und die ganze Zeit, in welcher der Körper von T bis R gelangt, $= t$. Nun ist $RX = TX \cdot \sin \alpha$, oder weil $RX = 2EH = 4AH = 4h$, und

TX = c · t ist: so wird RX = TX · sin α, d. i. 4h = c · t · sin α, oder h = $\frac{ct \cdot \sin\alpha}{4}$.

Ferner ist aber auch RX = gt^2 = 4h, also h = $\frac{gt^2}{4}$, und man erhält $gt^2 = ct \cdot \sin\alpha$, und hieraus die Zeit, in welcher der Körper wieder den Horizont in R erreicht, oder

$$1)\ t = \frac{c \cdot \sin\alpha}{g}.$$

Nun ist ferner TR = TX · cos α, oder w = ct · cos α; und wenn man für t seinen gefundnen Werth setzt, so findet man die Wurfweite w = $\frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$. Nach Geom. §. 245. ist aber $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha$. Daher erhält man die Wurfweite

$$2)\ w = \frac{c^2}{2g} \cdot \sin 2\alpha$$

Für $\alpha = 45°$ wird daher die Wurfweite am größten, weil $\sin 2 \cdot 45° = \sin 90° = 1$.

Weil h = $\frac{gt^2}{4}$, so erhält man, wenn ebenfalls anstatt t dessen Werth 1) gesetzt wird, die größte Höhe, welche der Körper erreicht,

$$3)\ h = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha^2}{4g}.$$

Aus 2) folgt $c^2 = \frac{2g \cdot w}{\sin 2\alpha}$, daher die Geschwindigkeit

$$4)\ c = \sqrt{\frac{2gw}{\sin 2\alpha}}.$$

Zusatz III. Fällt die Richtung des Wurfs in die Horizontallinie, so ist AW horizontal, und man findet nach §. 102. CL = $\frac{g}{c^2} \cdot AC^2$, d. i.

$$1)\ h = \frac{g}{c^2} \cdot w^2. \text{ Hieraus}$$

$$2)\ w = c\sqrt{\frac{h}{g}}, \text{ und}$$

$$3)\ c = w \cdot \sqrt{\frac{g}{h}}.$$

Viertes Kapitel.

Von den Wirkungen der Kräfte.

§. 103.

Erklärung. Die Größe einer Kraft, welche irgend eine Bewegung oder auch einen

Druck hervorbringt, erkennt man nur aus ihrer Wirkung (Effect). Wir können nicht sagen, wie groß eine Kraft sey, sondern man muß mehrere Kräfte mit einander vergleichen, weil man sich vorstellt, als wenn solche zugleich die Kräfte selbst wären.

§. 104.

Grundsatz. **Zwey oder mehrere bewegende Kräfte, die in gleichen Zeiten gleiche Wirkungen hervorbringen, sind gleich groß.**

§. 105.

Grundsatz. **Von zwey bewegenden Kräften, die in ungleichen Zeiten gleiche Wirkungen hervorbringen, ist diejenige die größere, die solche Wirkung in der kürzern Zeit äußert.**

Demnach verhalten sich bey gleichen Wirkungen die bewegenden Kräfte umgekehrt, wie die Zeiten.

Zusatz. Nennt man für zwey bewegende Kräfte P, p die Wirkungen oder Effecte E, e, welche sie in den Zeiten T, t hervorbringen, so ist also für $E = e$

$$P : p = t : T.$$

§. 106.

Grundsatz. **Von zwey bewegenden Kräften, die in gleichen Zeiten ungleiche Wirkungen hervorbringen, ist diejenige die größere, die mehr Wirkung hervorbringt; und die Kräfte verhalten sich demnach bey gleichen Wirkungszeiten wie ihre Wirkungen oder Effecte.**

Zusatz. Behält man vorige Bezeichnungen bey, so ist daher für T = t $P : p = E : e.$

§. 107.

Lehrsatz. Zwey bewegende Kräfte sind im geraden Verhältniß ihrer Effecte, und in dem umgekehrten ihrer Wirkungszeiten.

Beweis. Sind P, p die Kräfte, welche in den Zeiten T, t die Effecte E, e hervorbringen, und 𝔓 eine Kraft, welche in der Zeit t den Effect E äußert: so ist nach §. 105. Zus.

$$P : \mathfrak{P} = t : T,$$

und nach §. 106. Zus. $\mathfrak{P} : p = E : e.$

$$\text{Also } P : p = E \cdot t : e \cdot T,$$

$$\text{oder } = E : e + t : T,$$

woraus für E = e das Verhältniß des §. 105. Zus. und für T = t das Verhältniß des §. 106. Zus. folgt.

Zusatz I. Der Effect einer Kraft besteht aber entweder in Druck oder in Bewegung. Jede Kraft sucht nämlich Bewegung hervorzubringen; allein, wenn sie daran gehindert wird, so drückt sie gegen den Gegenstand, welcher die Bewegung hindert. Je größer nun dieser Druck ist, desto mehr wirkt auch die Kraft; und es verhalten sich also in dem Falle, wo keine Bewegung erfolgen kann, die Effecte wie die Drückungen.

Zusatz II. Wenn sich aber wirklich Bewegung äußert, so schätzt man den Effect der Kraft nach der Größe der Bewegung oder nach dem Bewegungsmoment, nämlich nach dem Producte der Masse, worauf die Kraft wirkt, mit ihrer Geschwindigkeit.

Heißen demnach P, p zwey bewegende Kräfte, welche mit den Geschwindigkeiten C, c in die Massen M, m wirken, und die Effecte E, e hervorbringen: so ist der Effect, welchen die Kraft P hervorbringt, nämlich E, = M . C, und der Effect, welchen die Kraft p äußert, nämlich e, = m . c. Daher

$$1) \; E : e = M \cdot C : m \cdot c.$$

Nach §. 106. Zus. ist aber auch für gleiche Wirkungszeiten

$$E : e = P : p.$$

Daher auch

$$2) \; P : p = M \cdot C : m \cdot c.$$

Für gleiche Massen oder $M = m$ folgt aus 1)

$$3) \; E : e = C : c,$$

und aus 2)

$$4) \; P : p = C : c.$$

Zusatz III. Sind im Zusatz II. 4) die bewegenden Kräfte P, p beständige Kräfte [§. 95.], deren Beschleinigungen [§. 98.] G, g sind, so wird aus $C = 2G$, aus $c = 2g$ [§. 99. 4)]; und es ist daher $P : p = 2G : 2g = G : g$; d. h. **zwey beständige Kräfte, welche gleiche Massen in gleichen Zeiten bewegen, verhalten sich wie ihre Beschleinigungen.**

Zusatz IV. Kennt man die Beschleinigung einer beständigen Kraft: so lässt sich nach dem Zusatz III. die Beschleinigung einer andern Kraft, welche entweder ebenfalls eine beständige ist, oder als solche betrachtet werden kann, bestimmen. Da nun die Schwerkraft die einzige beständige Kraft ist, deren Beschleinigung wir kennen [§. 98. Zus.], so hat man sie daher zum Maß aller übrigen Kräfte angenommen.

Denkt man sich daher irgend eine Masse $= M$, deren Gewicht $= M\gamma$ ist, auf einer Unterlage liegend: so ist der Druck dieser Masse auf die Unterlage oder die Kraft, mit welcher die Masse M gegen die Unterlage gedrückt wird, das Gewicht der Masse $= M\gamma$, und die Beschleinigung der auf die Masse M wirkenden Kraft ist die Beschleinigung der Schwerkraft $= g$ [§. 98. Zus.], weil, wenn die Unterlage angenommen wird, die Masse fällt. Wird nun eine andere eben so schwere Masse wie M, von einer beständigen Kraft $= P$, auf einer horizontalen und sehr glatten Ebene fortbewegt, und dieser Masse von der Kraft P eine Beschleinigung $= g'$ mitgetheilt, so ist für gleiche Zeiten und gleiche Massen nach vorigem Zusatz III. $M\gamma : P = g : g'$. Daher $g' = g \cdot \frac{P}{M\gamma}$, wo nun auch P die Kraft bedeuten kann, welche auf eine Masse vom Gewicht $= M\gamma$ wirkt und sie in Bewegung setzt.

Man findet daher die Beschleinigung einer Masse, wenn man die Kraft, welche auf die Masse wirkt, durch das Ge-

wicht der Masse dividirt, und diesen Quotienten mit g, der Beschleunigung der Schwere [§. 98. Zus.], multiplicirt.

Zusatz V. Sind P und $M\gamma$ in einerley Gewicht ausgedrückt, so heißt der Quotient $\frac{P}{M\gamma}$ die Beschleunigungszahl der Masse. Auch lässt sich, für $g = 1$, $\gamma = 1$, durch $\frac{P}{M}$, wenn P und M in einerley Cubikmaß oder Gewicht ausgedrückt sind, jede beschleunigende Kraft der Masse M bezeichnen.

Zusatz VI. Vermöge §. 99. lässt sich nun für jede gegebne Zeit t der durchlaufne Raum s und die erlangte Geschwindigkeit c einer Masse finden, welche von einer Kraft bewegt wird, die entweder ebenfalls wie die Schwerkraft eine beständige ist, oder als solche betrachtet werden kann. Ist also g' die Beschleunigung irgend einer Masse M, und P die Kraft, welche das Gewicht der Masse $= M\gamma$ bewegen soll: so ist auch

1) $g' = g \cdot \frac{P}{M\gamma}$ [Zus. IV.], und daher

2) $s = g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot t^2$ [§. 99. 2)]

3) $c = 2g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot t$ [§. 99. 4)]

$= 2\sqrt{g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot s}$ [§. 99. 6)]

4) $t = \sqrt{\frac{s}{g} \cdot \frac{M\gamma}{P}}$ [§. 99. 8)]

$= \frac{c}{2g} \cdot \frac{M\gamma}{P}$ [§. 99. 9)], und hieraus

5) $P = \frac{s \cdot M\gamma}{g \cdot t^2} = \frac{c \cdot M\gamma}{2gt} = \frac{c^2 \cdot M\gamma}{4gs}$.

Zusatz VII. Aus letztrer Gleichung folgt, daß sich bey verschiednen bewegenden Kräften und Massen die beschleunigenden Kräfte wie die in gleichen Zeiten durchlaufnen Räume, oder wie die am Ende dieser Zeiten erlangten Geschwindigkeiten verhalten. Denn haben p, m, s', c' mit P, M, s, c gleiche Bedeutung: so ist $p = \frac{s' \cdot m\gamma}{g \cdot t^2} = \frac{c' \cdot m\gamma}{2gt}$, und daher für gleiche Zeiten $\frac{P}{M\gamma} : \frac{p}{m\gamma}$, oder $\frac{P}{M} : \frac{p}{m} = s : s' = c : c'$.

Zusatz VIII. Besitzt die Masse M schon die Geschwindigkeit c, ehe die bewegende Kraft P zu wirken anfängt: so ist

nach §. 99. Zusatz II. nach Verlauf der Zeit t die Geschwindigkeit der Masse

$$1)\ v = c + 2g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot t,$$

und der von der Masse in dieser Zeit durchlaufne Raum

$$2)\ s = (c + g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot t) \cdot t.$$

Oder, wenn die Masse schon die Geschwindigkeit c hat, und die Kraft P wirkt durch den Raum s noch immer beständig fort: so ist am Ende dieses durchlaufnen Raums die Geschwindigkeit der Masse

$$3)\ v = \sqrt{(c^2 + 4g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot s)}.$$

Wirkt hingegen die bewegende Kraft P der bewegten Masse entgegen, so ist in diesem Falle

$$4)\ v = c - 2g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot t,$$

$$5)\ s = (c - g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot t)\ t, \text{ und}$$

$$6)\ v = \sqrt{(c^2 - 4g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot s)}.$$

Anmerkung. Zur Erläuterung des Bisherigen mag nachstehendes Beyspiel dienen.

Beyspiel. Man setze, daß mittelst eines Fadens über eine Rolle A [Fig. 66.] zwey Gewichte V und W herabhängen, wovon V größer als W ist; und wenn man die Masse der Rolle, Steifigkeit des Fadens und Friction bey Seite setzt: so wird das größere Gewicht sinken und das kleinere W aufwärts ziehen. Daß das Gewicht V sich nicht wie ein frey fallender Körper bewegen kann, ist leicht einzusehen, weil es von dem Gewichte W daran gehindert wird. Nun ist die Kraft, mit welcher V sinkt, oder die bewegende Kraft, oder die Ueberwucht = V — W, und das Gewicht der gesammten Masse, welche bewegt wird, = V + W, daher nach §. 107. Zus. VI. 1)

$$P = V - W, \text{ und } M\gamma = V + W,$$

und man findet die Beschleunigung, mit welcher die Massen sich bewegen oder

$$g' = g \cdot \frac{P}{M\gamma} = g \cdot \frac{V - W}{V + W}.$$

Wäre z. B. V = 5 Pfd., W = 3 Pfd., so ist die Beschleunigung dieser Gewichte oder der Raum, welchen die Gewichte in der ersten Secunde durchlaufen, $= g' = 17{,}377 \cdot \frac{5-3}{5+3} = 17{,}377 \cdot \frac{2}{8} =$

$$17{,}377 \cdot \tfrac{1}{4} = 4{,}344 \text{ Leipz. Fuß.}$$

In 3 Secunden hätten daher die Gewichte einen Raum von $= s = g \cdot \frac{P}{M\gamma} \cdot t^2 = 4{,}344 \cdot 3^2 = 4{,}344 \cdot 9 =$ 39,096 Leipz. Fuß durchlaufen, und ihre am Ende dieser

Zeit erlangte Geschwindigkeit wäre $c = 2g \cdot \frac{F'}{M\gamma} \cdot t = 2 \cdot 4{,}344 \cdot 3 = 6 \cdot 4{,}344 = 26{,}064$ Leipz. Fuß.

Fünftes Kapitel.

Vom Stoße der Körper.

§. 108.

Erklärung. Der Stoß [§. 4.] zwischen zweyen Körpern entsteht, wenn der eine seine Bewegung nicht fortsetzen kann, ohne den andern sowohl ruhenden als nach einerley oder entgegengesetzter Richtung sich bewegenden aus seiner Stelle zu vertreiben oder in der Größe seiner Bewegung eine Aenderung zu bewirken. Da nun der erste oder anstoßende Körper durch den Widerstand des zweyten oder gestoßnen ebenfalls eine Aenderung in der Größe seiner Bewegung erleidet: so ist einleuchtend, daß hierdurch der Zustand beyder Körper geändert wird, und ein Theil der Bewegung des einen in den andern gleichsam überzugehen scheint; deßhalb heißt das, was hier vorgeht, auch **Mittheilung der Bewegung**. Gehet die Richtung, nach welcher sich der Schwerpunct [§. 21. Zus. II.] des stoßenden Körpers bewegt, auch durch des andern Körpers Schwerpunct, und ist zugleich diese Richtung auf der Berührungsebene beyder Körper normal: so heißt der Stoß **gerade** oder **central**, sonst **schief** oder **excentrisch**.

Anmerkung. Die stoßenden Körper können von verschiedner Beschaffenheit seyn. Sie heißen hart, wenn sich ihre Gestalt durch den Druck oder Stoß ohne Bruch nicht ändern läßt, weich, wenn sie eine andere Gestalt annehmen und

behalten; elastisch, wenn sich zwar ihre Gestalt ändert, aber nachher wieder so herstellt, wie sie vor dem Stoße war. Diese Erklärungen, welche schon §. 1. Anmerk. gegeben sind, werden hier deßwegen wiederholt, weil sie der Lehre vom Stoße zum Grunde dieser Abtheilung liegen.

§. 109.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit für harte Körper nach dem geraden Stoße zu finden.

Auflösung. Bewegen sich die Massen M, m zweyer harter unelastischer Körper mit den Geschwindigkeiten C, c, und es ist die Größe der Bewegung [§. 107. Zus. II.] $M \cdot C = m \cdot c$ oder $M : m = c : C$: so ist die Kraft des einen bewegten Körpers so groß, wie die des andern [§. 107. Zus. II. 1), weil für $M \cdot C = m \cdot c$, auch $E = e$]. Wenn nun beyde Körper central [§. 108.] in entgegengesetzter Richtung an einander stoßen oder sich begegnen: so kann keine Bewegung erfolgen, beyde müssen ruhen.

Ist hingegen $C \cdot M > c \cdot m$, und beyde Körper stoßen central an einander, indem sie sich begegnen, so muß die Kraft oder die Bewegung cm einen Theil der Kraft oder Bewegung CM aufheben. Der Ueberrest $CM - cm$ vertheilt sich alsdann in beyde Massen $M + m$, welche sich mit irgend einer Geschwindigkeit v nach der Richtung der Masse, welche das größere Bewegungsmoment [§. 107. Zus. II.] hat, fortbewegen werden.

Die Größe der Bewegung dieser Massen kann aber nur, dem Ueberreste der Bewegung nach, dem Stoße gleich seyn; also $v(M + m) = CM - cm$. Folglich die Geschwindigkeit nach dem Stoße $= v = \frac{CM - cm}{M + m}$.

Bewegen sich beyde Körper nach einerley Richtung oder folgen einander, und der schnellere stößt den langsamern: so ist die Größe der Bewegung nach dem Stoße $CM + cm$. Wenn nun die Geschwindigkeit nach dem Stoße ebenfalls $= v$ gesetzt wird: so hat die Masse $M + m$ die Bewegung $CM + cm$. Daher ist $v(M + m) = CM + cm$, oder $v = \frac{CM + cm}{M + m}$.

Man findet daher allgemein die Geschwindigkeit nach dem Stoße für harte Körper, d. i.

$$v = \frac{CM \mp cm}{M + m},$$

wo das obere Zeichen für begegnende, das untere für einander folgende Körper gilt.

Beyspiel. Ein harter Körper, dessen Masse 12 Pfd. beträgt, bewege sich mit 7 Fuß Geschwindigkeit, indem ein andrer von 20 Pfd. mit 6 Fuß Geschwindigkeit nach entgegengesetzter Richtung stößt: so ist die Geschwindigkeit nach dem Stoße oder

$$v = \frac{6 \cdot 20 - 7 \cdot 12}{20 + 12} = \frac{120 - 84}{32} = \frac{36}{32} = 1{,}125 \text{ Fuß}.$$

Folgte hingegen der Körper von 12 Pfd. dem von 20 Pfd., so wäre

$$v = \frac{6 \cdot 20 + 7 \cdot 12}{20 + 12} = \frac{120 + 84}{32} = \frac{204}{32} = 6{,}375 \text{ Fuß}.$$

Zusatz I. Ist $v(M + m) = CM - cm$, oder $vM + vm = CM - cm$: so ist $cm + vm = CM - vM$, oder $(c + v)m = (C - v)M$. D. h. begegnen zwey Körper M, m einander: so verliert der erste den Theil $(C - v)M$ von seiner Kraft oder Bewegung; der zweyte m erhält, um sich in entgegengesetzter Richtung mit der Geschwindigkeit v zu bewegen, den Theil $(c + v)m$ als Zusatz zu seiner Bewegung.

Folgen die Körper M, m einander: so ist $vM + vm = CM + cm$, oder $(C - v)M = (v - c)m$. D. h. M verliert den

Theil $(C-v)M$ von seiner Bewegung, und m erhält den Theil $(v-c)m$ zu der seinigen.

Zusatz II. Ist m eine ruhende Masse, also $c=0$, so ist die Geschwindigkeit beyder Massen nach dem Stoße oder $v = \frac{CM}{M+m}$

Beyspiel. Ein harter Körper, welcher 10 Pf. wiegt, bewege sich mit der Geschwindigkeit von 15 Fuß gegen eine 1500 Pf. schwere Masse, so ist die Geschwindigkeit beyder nach dem Stoße $= v = \frac{15 \cdot 10}{10+1500} = \frac{150}{1510} = \frac{15}{151} = 0{,}099$ Fuß oder ungefähr 0,1 Fuß.

§. 110.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit, mit welcher sich central stoßende elastische Körper fortbewegen, zu finden.

Auflösung. Stoßen zwey elastische Körper, deren Massen M, m sind, mit den Geschwindigkeiten C, c central an einander, indem sie sich begegnen: so leiden beyde eine Aenderung in ihrer Gestalt, welche sich nach vollendetem Stoße wieder herstellt [§. 108. Anm.].

Beyde Körper müssen, so bald sie sich berühren, wechselseitig so lange auf die Veränderung ihrer Gestalt wirken oder sich wechselseitig so lange zusammenpressen, bis sie einerley Geschwindigkeit durch die Mittheilung der Bewegung [§. 108.] erlangt haben. Diese Geschwindigkeit, im Augenblicke der größten Zusammenpressung, sey x, und $MC > mc$: so würden sich beyde Körper, wenn die Elasticität nicht wirkte, nach der Richtung des Körpers M, weil $MC > mc$ seyn soll, mit dieser Geschwindigkeit fortbewegen. Alsdann ist $x = \frac{CM-cm}{M+m}$ [§. 109.]. Da sich beyde Körper begeg-

nen, so hat M den Theil (C—x) M an seiner Bewegung verloren, und m den Theil (c+x) m zu seiner Bewegung erhalten [§. 109. Zus. I.]. In dem Augenblick der größten Zusammenpressung suchen aber beyde Körper vermöge ihrer Elasticität ihre Figur wieder herzustellen, wozu eben so viel Kraft angewandt werden muß, als dazu gehörte, diese Figur zu ändern. Nun hat der Körper M die Kraft xM, durch die Wiederherstellung der Theile in m, welche nach einer seiner Bewegung entgegengesetzten Richtung geschieht, und wozu die Kraft (C—x) M angewandt werden mußte; daher behält derselbe nur noch die Kraft $= xM - (C-x) M = (2x - C) M$.

Der Körper m hat die Kraft xm; durch die Wiederherstellung der Theile in M, wozu die Kraft (c+x) m verwandt worden, erhält derselbe die Kraft $xm + (c+x) m = (2x+c) m$.

Setzt man nun die Geschwindigkeiten der Körper M, m, mit welchen sie sich nach der letzten Berührung fortbewegen, y und z: so ist, wenn sich die Körper begegnen

$$yM = (2x - C) M,$$
$$\text{und } zm = (2x + c) m.$$

Folgen die Körper einander, so findet man durch ähnliche Betrachtungen

$$yM = (2x - C) M,$$
$$\text{und } zm = (2x - c) m,$$

wo $x = \frac{CM \mp cm}{M+m}$ ist.

Demnach $y = (2x - C) = \frac{2CM \mp 2cm - C(M+m)}{M+m}$

$$= \frac{C(M-m) \mp 2cm}{M+m},$$

$$z = (2x \pm c) = \frac{2CM \mp 2cm \pm c(M+m)}{M+m}$$

$$= \frac{\pm c(M-m) + 2CM}{M+m},$$

wo das obere Zeichen für begegnende, und das untere für einander folgende Körper gilt.

Anmerkung. Beyde Geschwindigkeiten y und z sind so bestimmt worden, daß man voraussetzte, die Körper bewegen sich nach dem Stoße nach eben der Richtung, welche M vor dem Stoße hatte. So oft also die Geschwindigkeiten einen positiven Werth erhalten, gehen die Körper nach derselben Richtung, die M hatte; hingegen zeigt ein negativer Werth die entgegengesetzte Richtung an.

Zusatz I. Begegnen sich zwey gleiche elastische Massen mit verschiedner Geschwindigkeit, so ist $M = m$, also der Masse M Geschwindigkeit nach dem Stoße $= y = -\frac{2cm}{2m} = -c$, und der Masse m Geschwindigkeit $= z = \frac{2CM}{2M} = +C$; d. h. gleiche elastische Körper, die einander begegnen, kehren von einander mit verwechselten Geschwindigkeiten zurück.

Zusatz II. Ist der Körper m in Ruhe, und beyde Massen einander gleich, also $c = 0$, und $M = m$: so ist nach dem Stoße für M die Geschwindigkeit $y = 0$, und für m die Geschwindigkeit $z = \frac{2CM}{2M} = C$; d. h. wenn eine elastische Masse an eine gleich große ruhende stößt, so bekommt die ruhende die Geschwindigkeit der anstoßenden, und die anstoßende bleibt stehen.

Zusatz III. Sind die Bewegungsgrößen CM und cm einander gleich, und die Körper begegnen sich: so findet man $y = -C$, und $z = +c$; d. h. bey gleicher Größe der Bewegung kehren elastische Körper mit ihrer Geschwindigkeit zurück.

§. 111.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit eines in eine weiche ruhende Masse eindringenden harten Körpers zu bestimmen.

Auflösung. Vorausgesetzt, daß die weiche ruhende Masse dem Eindringen des Körpers gleich stark widersteht, und ihm in gleichen Zeiten gleiche Geschwindigkeiten raubt, so daß dadurch

eine gleichförmig verzögernde Bewegung bewirkt wird: so sey $M\gamma$ das Gewicht des Körpers, welcher in die weiche ruhende Masse eindringt, F die Kraft, welche die Geschwindigkeit des Körpers gleichförmig verzögert, C die anfängliche Geschwindigkeit des Körpers, v die Geschwindigkeit des Körpers am Ende der Zeit T; und man hat nach §. 107. Zus. VIII. 4) $v = C - 2g \cdot \frac{F}{M\gamma} \cdot T$.

Zusatz. Ist S' die Tiefe des eindringenden Körpers am Ende der Zeit T, so ist nach §. 107. Zus. VIII. $S' = (C - g \cdot \frac{F}{M\gamma} \cdot T)\,T$. Nun war $v = C - 2g \cdot \frac{F}{M\gamma} \cdot T$, also $T = \frac{C-v}{2g} \cdot \frac{M\gamma}{F}$, und $T^2 = \frac{(C-v)^2}{4g^2} \cdot \frac{M\gamma^2}{F^2}$. Daher $S' = CT - g \cdot \frac{F}{M\gamma} \cdot T^2 = \frac{C^2 - Cv}{2g} \cdot \frac{M\gamma}{F} - g \cdot \frac{F}{M\gamma} \cdot \frac{(C-v)^2}{4g^2} \cdot \frac{M\gamma^2}{F^2} = \frac{C^2 - v^2}{4g} \cdot \frac{M\gamma}{F}$.

Für $v = 0$ werde $S' = S$, so hat man die ganze Tiefe des eindringenden Körpers, d. i. $S = \frac{C^2}{4g} \cdot \frac{M\gamma}{F}$.

Anmerkung. Dieser Satz findet seine Anwendung beym Einrammeln der Pfähle in gleichförmig widerstehendes Erdreich.

Sechstes Kapitel.

Vom freyen Falle der Körper auf einer schiefen Ebene.

§. 112.

Aufgabe. Auf der schiefen Ebene AB [Fig. 67.], welche unter dem Winkel ABC $= \alpha$ gegen den Horizont geneigt ist, befindet sich ein Körper in A, dessen Gewicht $= P$ ist, und welcher sich ungehindert von

A bis B bewegen kann; man sucht die **Zeit** T, in welcher der **Weg** $AB = S$ durchlaufen wird, so wie die **Geschwindigkeit** des Körpers am Ende der Zeit T und des durchlaufnen Raums S.

Auflösung. Das relative Gewicht oder die Gewalt, mit welcher der Körper nach der Richtung AB getrieben wird (der Herabgleitungstrieb), ist $= P \cdot \sin\alpha$ [§. 42. Zus. I. 1)]; und weil auf der ganzen schiefen Ebene das relative Gewicht unverändert bleibt, so ist $P \cdot \sin\alpha$ die bewegende Kraft, welche den Körper von A bis B mit gleichförmiger Beschleunigung bewegt. Man findet daher die Beschleunigung G desselben [§. 107. Zus. VI. 1)]

1) $G = g \cdot \frac{P \cdot \sin\alpha}{P} = g \cdot \sin\alpha$,

und hieraus die Zeit [§. 99. 8)]

2) $T = \sqrt{\frac{S}{G}} = \sqrt{\frac{S}{g \cdot \sin\alpha}}$.

Die am Ende der Zeit T oder am Ende des durchlaufnen Raums in B erlangte Geschwindigkeit C ist nach §. 99. 4) und 6)

3) $C = 2G \cdot T = 2g \cdot T \cdot \sin\alpha$

$= 2\sqrt{G \cdot S} = 2\sqrt{g \cdot S \cdot \sin\alpha}$,

und der durchlaufne Raum AB oder

4) $S = G \cdot T^2$ [§. 99. 2)] $= g \cdot T^2 \cdot \sin\alpha$.

Zusatz I. Aus dieser Aufgabe erhellt, daß bey der schiefen Ebene sich die durchlaufnen Räume wie die Quadrate der Zeiten, und die verfloßnen Zeiten wie die am Ende dieser Zeiten erlangten Geschwindigkeiten sich verhalten.

Hieraus folgt ferner, weil $G = g \cdot \sin\alpha = g \cdot \frac{AC}{AB}$, daß sich bey der schiefen Ebene die Beschleunigungen wie die Höhen der schiefen Ebene dividirt durch ihre Längen verhalten.

Nach §. 107. Zus. III. verhalten sich aber beständige Kräfte wie ihre Beschleunigungen, folglich verhalten sich auch bestän-

dige oder beschleunigende Kräfte auf der schiefen Ebene wie die Höhen der schiefen Ebene dividirt durch ihre Längen.

Zusatz II. Wenn der Körper in der Verticallinie AD' frey herabfiele, so wäre seine in der Zeit T erlangte Geschwindigkeit $= 2g \cdot T$ [§. 99.4)]; auf der schiefen Ebene erhält derselbe in eben der Zeit die Geschwindigkeit $2g \cdot T \cdot \sin\alpha$. Daher verhalten sich diese Geschwindigkeiten $= 1 : \sin\alpha = AB : AC$; d. h. die Geschwindigkeit, welche ein Körper durch den freyen verticalen Fall erhält, verhält sich zu derjenigen, welche er durch den Fall auf einer schiefen Ebene in derselben Zeit erlangt, wie die Länge der schiefen Ebene zu ihrer Höhe.

Zusatz III. In der Zeit T fällt der Körper vertical von der Höhe $h = g \cdot T^2$ [§. 99.2)], und in eben der Zeit durchläuft er auf der schiefen Ebene den Raum $S = g \cdot T^2 \cdot \sin\alpha$; und es verhält sich daher $h : S = 1 : \sin\alpha = AB : AC$; d. h. der vertical durchlaufne Raum eines Körpers verhält sich zu dem auf der schiefen Ebene in derselben Zeit zurückgelegten Weg, wie die Länge der schiefen Ebene zur Höhe.

Wenn daher ein Körper auf der schiefen Ebene den Weg AB durchlaufen hat: so findet man den in eben der Zeit durchlaufnen verticalen Weg AD, wenn aus B auf AB eine winkelrechte Linie BD gezogen wird, bis solche die verlängerte AC schneidet. Denn $AD : AB = AB : AC$ [Geom. §. 162. Zus.].

Umgekehrt, wenn ein Körper in der Zeit T den verticalen Weg AD [Fig. 68.] durchlaufen hat: so findet man für diese Zeit den Weg AE auf der schiefen Ebene AB, wenn man DE auf AB winkelrecht zieht, oder über AD einen Halbkreis beschreibt, welcher AB in E schneidet [Geom. §. 139.].

Dasselbe würde für jede andere schiefe Ebene AF gelten, wo AG der gesuchte Weg ist.

Zusatz IV. Aus dem Vorhergehenden ergibt sich ferner der von Gallilei erfundne Satz: daß ein Körper jede Sehne AE, AG [Fig. 68.] im Halbkreise in eben der Zeit durchläuft, darin er durch den verticalen Durchmesser AD frey fallen würde; d. h. die Sehnen werden gleichzeitig oder isochron durchlaufen.

Ebendasselbe gilt von den untern Sehnen DE', DG', weil sich allemal eine parallele Sehne AE, AG angeben lässt, welche

mit der aus D gezognen einerley Neigung und Länge hat [Geom. §. 133.].

Es werden daher alle Sehnen, welche durch die Endpuncte des verticalen Durchmessers eines Kreises gehen, in gleichen Zeiten durchlaufen.

Zusatz V. Die in D, G, E [Fig. 68.] erlangten Geschwindigkeiten bezeichne man mit c, c', c'': so verhält sich nach Zus. II.

$$c : c' = AG : AH = AD : AG,$$
$$c'' : c = AK : AE = AE : AD,$$

folglich $c'' : c' = AE : AG$,

also verhalten sich die in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten wie die Sehnen oder wie die in gleichen Zeiten durchlaufnen Räume.

Zusatz VI. Die Zeit des Falles durch AD, AB [Fig. 68.] sey t, t', so ist die Zeit durch AE = t [Zus. III.]. Aber nach Zus. I. ist $t^2 : t'^2 = AE : AB = \frac{AD^2}{AB} : AB$ (weil $\triangle ADB \backsim \triangle AED$, so ist $AB : AD = AD : AE$) $= AD^2 : AB^2$; daher $t : t' = AD : AB$; d. h. es verhält sich die Zeit des verticalen Falles durch die Höhe der schiefen Ebene zur Zeit des Falles durch die Länge derselben, wie die Höhe der schiefen Ebene zu ihrer Länge.

Setzt man die Zeiten, in welchen die Körper die Räume AD, AB, AF durchlaufen = t, t', t'', so verhält sich

$$t' : t = AB : AD,$$

eben so $t : t'' = AD : AF$,

folglich $t' : t'' = AB : AF$;

d. h. wenn Körper auf verschiednen schiefen Ebenen von gleicher Höhe herunterfallen, so verhalten sich die verfloßnen Zeiten wie die Längen der Ebenen.

Zusatz VII. Die durch den Fall von A in D [Fig. 68.] erlangte Geschwindigkeit sey c, und durch den Fall auf der schiefen Ebene AB sey sie = C: so ist nach §. 112.3) $C = 2\sqrt{(g \cdot AB \cdot \sin\alpha)} = 2\sqrt{g \cdot AD}$, weil $\sin\alpha = \frac{AD}{AB}$.

Durch den freyen Fall in der Verticale AD erhält der Körper eine Geschwindigkeit $c = 2\sqrt{g \cdot AD}$ [§. 99.6)]; daher ist $C = c$, oder die erlangte Geschwindigkeit eines durch die Höhe einer schiefen Ebene vertical gefallnen Körpers ist

eben so groß als diejenige, welche der Körper durch den Fall längs der schiefen Ebene erhält.

Wenn umgekehrt ein Körper längs einer schiefen Ebene BA mit der Geschwindigkeit C zu steigen anfängt: so wird er in eben der Zeit seine größte Höhe erreichen, in welcher er beym Herunterfallen auf der schiefen Ebene die Geschwindigkeit C erlangt hätte. Auch wird der beym Herunterfallen durchlaufnen Weg eben so groß seyn, wie beym Hinaufsteigen, welches man auf eine ähnliche Art, wie beym verticalen Steigen der Körper erweiset, wenn übrigens Reibung und Widerstand der Luft bey Seite gesetzt werden.

Anmerkung I. Die Erfahrung §. 97. lässt sich daher auf der schiefen Ebene viel bequemer und richtiger als in der Verticallinie anstellen, weil dort die Bewegung viel langsamer erfolgt, folglich besser zu beobachten ist. Nur muß zum Vermeiden des Reibens alles recht glatt und polirt seyn.

Anmerkung II. Wenn AB, BC, CD [Fig. 69.] mehrere unter verschiednen Winkeln mit einander verbundne schiefe Ebenen sind, deren verticale Höhen durch die Linien EG, GH, HD bezeichnet werden: so wird ein Körper, welcher von A bis B fällt, in B eben die Geschwindigkeit erlangen, welche er durch den freyen Fall in der Verticale EG erhält. Verlöre der Körper durch die Veränderung seiner Richtung in den Winkeln B, C nichts von seiner Geschwindigkeit: so würde die durch den Fall in der gebrochnen Linie ABCD in D erlangte Geschwindigkeit eben so groß seyn, als wenn er von der zugehörigen verticalen Höhe ED frey herabgefallen wäre.

Durch die Bewegung in einer krummen Linie verliert aber ein Körper nichts von seiner Geschwindigkeit [§. 92. Zus. III.]. Wenn daher ADK eine krumme Linie ist, welche sich in einer verticalen Ebene befindet, und man zieht die horizontale Tangente FL, mit ihr parallel die Ordinate AK, und durch den Berührungspunct D die Verticale DE: so wird ein Körper, welcher auf der krummen Linie AD frey herunterfällt, in D eine eben so große Geschwindigkeit nach der Richtung DL erhalten, als wenn er durch die Verticale ED frey herabgefallen wäre. Mit dieser in D erlangten Geschwindigkeit wird er fortfahren sich zu bewegen, und auf der krummen Linie DK einen Weg durchlaufen, welcher der Höhe DE zugehört, bis er im höchsten Puncte K seine Geschwindigkeit ganz verloren hat. In eben der Zeit muß der Körper wieder von K bis D herunterfallen, darin er gestiegen ist; und diese wechselseitige Bewegung des Körpers würde ohne Ende fortdauern, wenn er bey seiner Bewegung keine Hindernisse fände.

Sind beyde Bogen AD, DK einander gleich, so fällt der Körper durch sie in eben der Zeit von A nach D, in welcher er von D nach K steigt, und umgekehrt.

Anmerkung III. Wenn der Bogen ADK eine Cykloide oder Radlinie ist: so lässt sich mit Hilfe der höhern Geometrie erweisen, daß unter allen möglichen Linien, welche zwischen A und D enthalten seyn können, der Körper in dieser Linie in der kürzesten Zeit von A bis D fällt. Auch hat diese Linie die Eigenschaft, daß ein Körper in eben der Zeit in D anlangt, er mag aus A oder aus einer niedrigern Stelle in der Linie AD seine Bewegung anfangen, weßhalb man sie tautochronisch nennt. [Man sehe J. Krafts Mechanik, übers. und verb. von J. C. A. Steingrüber, Dresden 1787. 8. S. 127.]

Siebentes Kapitel.

Von der Kreisbewegung.

§. 113.

Erklärung. Wenn sich ein Körper, dessen Masse M man nur als träge annimmt, in einem Kreise ABD [Tab. VI. Fig. 70.] mit gleich bleibender Geschwindigkeit herumbewegt, so würde er vermöge seiner Trägheit in jedem Puncte A des Kreises seine Bewegung nach der Tangente AF fortsetzen, wenn ihn nicht immerfort eine Kraft von dieser geraden Richtung ablenkte, und nach den Mittelpuncte C triebe. Diese Centralkraft nennt man die Centripetal- oder Annäherungskraft. Da man sieht, daß der Körper bey der Kreisbewegung ein beständiges Streben äußert, sich vom Mittelpuncte C zu entfernen: so wird dieses Bestreben die Tangential-, Centrifugal-, Flieh- oder Schwungkraft genannt; sie ist der Centripetalkraft entgegengesetzt und muß ihr gleich seyn.

Anmerkung. Ist der Körper mittels eines Fadens in C befestiget, so ist die Gewalt, mit welcher der Körper bey der Umdrehung den Faden spannt, die Schwungkraft. Sie wird empfunden, wenn man eine an einem Faden befestigte Kugel mit der Hand in einem Kreise herumschwingt.

§. 114.

Aufgabe. Das Gewicht eines schweren Körpers $M\gamma$ ist gegeben, ferner die Geschwindigkeit c, mit welcher sich die Masse des Körpers in einem Kreise, dessen Halbmesser $CA = r$ [Fig. 70.] ist, herumbewegen soll; man soll die Schwungkraft angeben.

Auflösung. Man nehme einen Kreisbogen AB so klein wie möglich an, so daß man sich denken kann, er falle mit seiner Tangente AE zusammen. Durchläuft nun der Körper in der Zeit t den Weg AB, oder sich selbst überlassen nach der Tangente AF den Weg $AE = AB$ [§. 113.]: so würde er sich in dieser Zeit von dem Mittelpuncte C um $BE = \frac{AE^2}{DE}$ [Geom. §. 173.] $= \frac{AB^2}{DB}$ (weil für diese sehr kleinen Linien $AE = AB$ man anstatt $DE = DB$ setzen kann) $= \frac{AB^2}{2AC}$ entfernen. Aber $AB = c \cdot t$ [§. 90.1)]; daher $BE = \frac{c^2 \cdot t^2}{2r}$ der Raum, um welchen sich der Körper in der Zeit t von dem Mittelpunct C zu entfernen sucht, und durch welchen die Centralkraft V den Körper in der Zeit t wieder an sich ziehen muß. In dieser Hinsicht ist dann die Centralkraft $V = \frac{BE}{g \cdot t^2} \cdot M\gamma$ [§. 107. Zus. VI. 5)] $= \frac{c^2 \cdot t^2}{2r \cdot g \cdot t^2} \cdot M\gamma = \frac{c^2}{2g \cdot r} \cdot M\gamma$. Weil nun die Centralkraft der Schwungkraft gleich seyn muß [§. 113.], so ist daher die Schwungkraft

1) $V = \frac{c^2}{2g \cdot r} \cdot M\gamma$.

Die Zeit eines Umlaufes sey $= T$, und $3,141\ldots = \pi$, so ist $2r\pi = c \cdot T$ [§. 90. 1)], oder $c^2 = \frac{4r^2\pi^2}{T^2}$; daher

2) $V = \frac{4r^2\pi^2}{2g \cdot rT^2} \cdot M\gamma = \frac{2r\pi^2}{gT^2} \cdot M\gamma$.

Zusatz. Aus 1) folgt $V : M\gamma = 2 \cdot \frac{c^2}{4g} : r$; d. h. die Schwungkraft verhält sich zum Gewicht der umlaufenden Masse, wie die doppelte Fallhöhe, welche der Geschwindigkeit der Masse zugehört, zum Halbmesser.

Anmerkung. Das zwischen zwey horizontalen Mühlsteinen durch das Läuferauge in der Mitte einfallende Getreide wird durch die Schwungkraft, welche es wegen der Umdrehung zwischen beyden Steinen erhält, nach dem Umfange derselben oder gegen den Lauft bewegt.

Räder, deren Masse nicht gleichförmig vertheilt ist, drücken die Wellzapfen vermöge der Schwungkraft nach derjenigen Seite hin, wo die größere Masse sich befindet.

§. 115.

Lehrsatz. **Wenn zwey an einer steifen Linie befindliche Massen vermöge beständiger Kräfte in gleicher Zeit um einerley Winkel gedreht werden sollen: so müssen sich diese Massen umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von dem Drehungspuncte oder der Axe, um welche sie gedreht werden, verhalten.**

Beweis. An der steifen und geraden Linie AC [Fig. 71.], welche sich um ihren Endpunct C dreht, sey in der Entfernung $AC = a$ die Masse M angebracht, auf welche die beständige Kraft P wirkt: so ist die Beschleunigung der Masse $M = g \cdot \frac{P}{M}$ [§. 107. Zus. IV. und V.]. Soll nun statt M eine Masse M' in der Entfernung $CB = b$ angebracht,

und von der Kraft P, welche in der Entfernung CA angebracht bleibt, ebenfalls bewegt werden: so ist die auf M' drückende Kraft $= \frac{a}{b} \cdot P = P'$ oder $P' : P = a : b$, so wie die Beschleunigung der Masse $M' = g \cdot \frac{P'}{M'}$; und man kann sich nun vorstellen, als ob an der Linie CA zwey Massen M, M' angebracht wären, welche von den Kräften P, P' bewegt würden, nämlich die Masse M von der Kraft P, und die Masse M' von der Kraft P'. Da nun nach der Voraussetzung die beyden Kräfte P, P' die Massen M, M' in einerley Zeit um einerley Winkel drehen sollen: so muß, während die Kraft P die Masse M durch den Bogen AA' bewegt, die Kraft P' die Masse M' durch den ähnlichen Bogen BB' [Geom. 233. Anm.] bewegen, und es müssen sich daher die Beschleunigungen wie die in einerley Zeit durchlaufnen Wege verhalten, d. i.

$$g \cdot \frac{P}{M} : g \cdot \frac{P'}{M'} = AA' : BB',$$

$$\text{oder } \frac{P}{M} : \frac{P'}{M'} = a : b,$$

$$\text{aber } P' : P = a : b.$$

$$\text{Also } \frac{P \cdot P'}{M} : \frac{P \cdot P'}{M'} = a^2 : b^2,$$

$$\text{oder } M' : M = a^2 : b^2,$$

$$\text{und } a^2 M = b^2 M'.$$

Zusatz I. Weil hiernach keine Masse wegen der einwirkenden bewegenden Kraft durch die erhaltne Beschleunigung die Linie schneller drehen oder der Masse voreilen kann: so lassen sich solche in Hinsicht der Umdrehung als gleichgültig ansehen, und man nennt daher die Producte $a^2 M$, $b^2 M'$ gleichgültige Massenmomente oder Momente der Trägheit in Hinsicht ihrer Umdrehung.

Zusatz II. Wenn c die Geschwindigkeit der Masse M ist, und c' die Geschwindigkeit der Masse M', so ist $c : c' = a : b$ [§. 19. Zus. II.]. Daher $M' : M = c^2 : c'^2$, folglich

$cM^2 = c'^2M'$; d. h. die Momente der Trägheit zweyer Massen sind einander gleich, wenn die Producte aus den Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten gleich sind, daher man auch diese Producte Momente der Trägheit zu nennen pflegt, und als solche in Rechnung bringen kann.

Zusatz III. Wird die Masse M' aus B weggenommen, und eine andere m in einer Entfernung CD $= \beta$ angebracht, und es ist $\beta^2 m = b^2 M'$: so wird die beschleunigende Kraft der Masse m noch eben so auf die Bewegung der Linie wirken, wie die beschleunigende Kraft der Masse M' in B, vorausgesetzt, daß die bewegende Kraft unverändert bleibt. Auch sieht man ein, wie statt einer Masse M' eine andere gegebne m gesetzt werden kann, wenn man $\beta^2 = b^2 \cdot \frac{M'}{m}$ nimmt; oder wenn die Entfernung β gegeben ist, so lässt sich die Masse $m = \frac{b^2}{\beta^2} \cdot M'$ finden.

Die Beschleunigung, mit welcher sich jeder Punct der Linie AC umdreht, bleibt alsdann offenbar dieselbe, wenn die bewegende Kraft, welche auf M wirkt, unverändert bleibt.

§. 116.

Aufgabe. An einem mathematischen Hebel [§. 18.] befinden sich mehrere Massen A, B, C, D . . . in den Entfernungen a, b, c, d . . . vom Drehungspuncte, und in irgend einer Entfernung k von diesem Puncte ist eine bewegende Kraft P angebracht, welche immer winkelrecht auf den Hebel wirkt; man sucht die Beschleunigung g' des von der Kraft angegriffnen Punctes.

Auflösung. Es kommt hier darauf an, in der Entfernung k eine Masse M anzugeben, welche sämmtlichen Massen A, B, C, D . . . in den Entfernungen a, b, c, d . . . gleichgültig ist, oder die Massen A, B, C, D . . . nach der Lehre vom Moment

der Trägheit [§. 115. Zus. III.] auf die Entfernung k zu reduciren. Nun findet man wie §. 115. Zus. III. $M = \frac{a^2A + b^2B + c^2C + d^2D + \ldots}{k^2}$. Daher die gesuchte Beschleunigung nach §. 107. Zus. VI. 1) $g' = g \cdot \frac{P}{M}$ oder $g' = g \cdot \frac{k^2 \cdot P}{a^2A + b^2B + c^2C + d^2D}$.

Zusatz I. Ist für irgend einen Zeitpunct die Geschwindigkeit eines Punctes in der Entfernung k bekannt, so kann hiernach leicht die Geschwindigkeit für jede andere Entfernung nach §. 19. Zus. II. gefunden werden.

Auch kann man im vorigen §. statt der Entfernungen a, b, c... die Geschwindigkeiten der Massen A, B, C... für irgend einen Zeitpunct in Rechnung bringen.

Zusatz II. In dem Vorhergehenden war vorausgesetzt, daß die Massen in einem einzigen Puncte vereinigt wären, oder daß alle körperliche Theile der Massen als gleich weit von dem Drehungspuncte angesehen werden könnten. Weil es aber sehr wichtig ist, das Moment der Trägheit eines jeden Körpers zu kennen, um mittelst desselben den Gang einer Maschine zu beurtheilen: so müßte man, um dieses Moment für einen Körper von bestimmter Figur und gegebner Entfernung von der Drehungsaxe zu finden, für jedes Elementartheilchen desselben das Moment der Trägheit suchen, da denn die Summe aller dieser Momente das Moment der Trägheit des ganzen Körpers gibt. Man kann das Moment der Trägheit eines Körpers, dessen Masse M ist, durch z^2M bezeichnen, und die höhere Analysis lehrt die Summe von den Momenten der einzeln Elementartheilchen der ganzen Masse ohne eine mühsame Summation finden.

Sobald das Moment der Masse z^2M eines Körpers, welcher sich um eine gegebne Axe dreht, bekannt ist, so lässt sich daraus allemal mittels der bewegenden Kraft P und ihrer Entfernung k von der Axe, die Beschleunigung g' des angegriffnen Punctes finden, vorausgesetzt, daß die Richtung der Kraft P winkelrecht auf einen geraden Hebelarm sey, der mit der Axe, um welche die Masse gedreht werden soll, verbunden ist. Man erhält alsdann $g' = g \cdot \frac{k^2P}{z^2M}$, und es wird angenom-

men, daß außer der Masse M keine Masse weiter in Bewegung gesetzt werden darf.

Zusatz III. Da man bey Maschinenberechnungen es hauptsächlich mit prismatischen Körpern zu thun hat, welche sich um eine Axe drehen: so findet man mittels der höhern Analysis für diese Körper folgende Trägheitsmomente.

Nennt man die Länge eines vierseitigen prismatischen Körpers AD = l [Fig. 72.], die Grundfläche des Körpers = f, also seinen körperlichen Inhalt f · l = M, und die winkelrechte Entfernung des Körpers vom Drehungspuncte C, nämlich CD = a: so ist in diesem Falle das Trägheitsmoment oder Massenmoment des Körpers

1) $z^2M = f \cdot l\,(a^2 + \frac{l^2}{3}) = \frac{M}{3}(3a^2 + l^2)$.

Würde der Körper AE [Fig. 72.], dessen Länge l und Grundfläche f ist, in der Entfernung CD = a um C gedreht, so wäre, wenn AD = l' ist, in diesem Falle

2) $z^2M = f \cdot l\,(a^2 + l'^2 - ll' + \frac{l^2}{3})$

$= \frac{M}{3}(3a^2 + 3l'^2 - 3ll' + l^2)$.

Für $l' = \frac{l}{2}$ ist

3) $z^2M = f \cdot l\,(a^2 + \frac{l^2}{12}) = \frac{M}{3}(3a^2 + \frac{l^2}{4})$.

Wäre der Körper unmittelbar an der Axe befestiget, also a = o: so wäre nach 1)

4) $z^2M = \frac{M}{3} \cdot l^2$, und nach 2)

5) $z^2M = \frac{M}{3}(3l'^2 - 3ll' + l^2)$, und nach 3)

6) $z^2M = \frac{M}{12} \cdot l^2$.

Das Trägheitsmoment des Körpers FE [Fig. 73.], wenn man FD = l, ED = l' und CD = a setzt, findet man

7) $z^2M = f\,(l - l') \cdot [a^2 + (\frac{l^2 + ll' + l'^2}{3})]$

$= \frac{M}{3} \cdot [3a^2 + l\,(l + l') + l'^2]$.

Das Trägheitsmoment eines prismatischen Körpers, dessen Axe gegen die Drehungsaxe ZX [Fig. 74.] geneigt, beyde Axen aber in einer Ebene liegen, findet man, wenn des Körpers Länge AC = l, Querschnitt = f, und die Entfernung AB = a ist, nämlich

8) $z^2M = f \cdot l \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{M}{3} \cdot a^2$.

Wäre AE der prismatische Körper, dessen Länge l, so wie die Entfernungen AB = a, DE = b sind: so ist

9) $= z^2M = f \cdot l\,(\frac{a^2 + ab + b^2}{3}) = \frac{M}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

Bey einem Cylinder, welcher um seine Axe gedreht wird, und dessen Halbmesser = R, Länge = l ist, ist das Trägheitsmoment oder Massenmoment

10) $z^2M = l \cdot R^2\pi \cdot \frac{R^2}{2} = \frac{M}{2} \cdot R^2$, wenn $l \cdot R^2\pi = M$ der körperliche Inhalt des Cylinders ist.

Ist der Cylinder hohl, sein großer Halbmesser = R, der kleinere oder innere Halbmesser = r und Länge = l: so ist

11) $z^2M = l\pi\,(R^2 - r^2) \cdot \left(\frac{R^2 + r^2}{2}\right)$
$= \frac{M}{2} \cdot (R^2 + r^2)$, wenn $l\pi\,(R^2 - r^2) = M$ den körperlichen Inhalt des hohlen Cylinders bedeutet.

Das Trägheitsmoment eines rechtwinklichen Parallelepipeds, BF [Fig. 75.], dessen Breite AB = a, Dicke BD = b, Länge BE = l, und welches um seine Längenaxe ZX gedreht wird, ist

12) $z^2M = lab\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right) = \frac{M}{12}(a^2 + b^2)$,

und für a = b

13) $z^2M = la^2 \cdot \frac{a^2}{6} = \frac{M}{6} \cdot a^2$.

§. 117.

Aufgabe. Ueber eine massive Rolle hängen zwey Gewichte V, W [Tab. V. Fig. 66.], und zwar V > W: man soll die Bewegung des Gewichtes V mit Rücksicht auf die Masse der Rolle und auf die Reibung bestimmen.

Auflösung. Die Masse der Rolle sey M, ihr Halbmesser = r, so ist ihr Trägheitsmoment = $\frac{M}{2} \cdot r^2$ [§. 116. Zus. III. 10)], und die auf den Halbmesser r reducirte Masse [§. 115. Zus. III.] = $\frac{M}{2}$.

Wegen der Reibung am Zapfen der Rolle, und zur Ueberwältigung der Steifigkeit der Seile sey am Halbmesser r eine Kraft = F erforderlich, so ist die bewegende Kraft oder die Ueberwucht = V − W − F = V − (W + F), die am Halbmesser r zu bewegende Masse (wenn die Masse des Zapfens nicht in Rechnung kommt) = V + W + $\frac{M}{2}$. Daher nach §. 107. Zus. VI. 1) die Beschleunigung des Gewichtes V d. i.

$$g' = g \cdot \frac{V - (W + F)}{V + W + \frac{M}{2}}.$$

Beyspiel. Es sey $V = 5$ Pfd., $W = 3$ Pfd., die Masse der Rolle oder $M = 1$ Pfd., der Halbmesser der Rolle oder $r = 6$ Zoll, der Halbmesser des Zapfens $= \varrho = \frac{1}{4}$ Zoll $= 0{,}25$ Zoll, die Dicke der Schnur, woran die Gewichte hängen, $= \delta =$ 1 Linie, und der Reibungscoefficient $\varphi = 0{,}3$: so ist die auf den Halbmesser der Rolle reducirte Zapfenfriction $= \varphi \cdot \frac{\varrho}{r}(V + W + M) = 0{,}3 \cdot \frac{0{,}25}{6}(5 + 3 + 1) = \frac{0{,}075 \cdot 9}{6} = 0{,}113$ Pfd.

Ferner die auf den Halbmesser der Rolle reducirte Seilesbiegung $= \frac{3}{4} \cdot \frac{\delta}{2r}(V + W) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 12} \cdot 8 = 0{,}042$ Pfd., daher

$$F = 0{,}113 + 0{,}042 = 0{,}155 \text{ Pfd.}$$

Demnach ist die **Beschleunigung** des Gewichtes V oder

$$g' = \frac{5 - (3 + 0{,}155)}{5 + 3 + 0{,}5} \cdot 17{,}377$$
$$= 17{,}377 \cdot \frac{1{,}845}{8{,}5} = 3{,}771 \text{ Fuß.}$$

In 3 Secunden hätten z. B. die Gewichte einen Raum $= s = g' \cdot t^2$ [§. 99. 2)] $3{,}771 \cdot 9 = 33{,}939$ Fuß durchlaufen, und ihre erlangte Geschwindigkeit wäre $c = 2g' \cdot t$ [§. 99. 4)] $= 2 \cdot 3{,}771 \cdot 3 = 22{,}626$ Fuß.

Zusatz I. Bey den Untersuchungen über die Friction der Körper unterscheidet man die Friction nach vorhergegangener Ruhe [§. 31. Zus. II.], oder im Anfange der Bewegung, von der Friction während der Bewegung, da letztere beträchtlich kleiner ist als erstere. Versuche über die Friction im Anfange der Bewegung lassen sich leicht nach §. 31. Zus. I. anstellen. Soll aber die Friction an einem Zapfen während der Bewegung durch Versuche bestimmt werden: so kann solches mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabe geschehen.

Mit Beybehaltung der eingeführten Bezeichnung sey m das Gewicht des Zapfens, an welchem die Rolle befestiget ist, r = dem Halbmesser der Rolle oder Scheibe, und ϱ = dem

Halbmesser des Zapfens, an dessen Umfange die Friction $= f$ gesucht wird: so ist die Beschleunigung des Gewichts V d. i. $g' = g \cdot \frac{V-(W+F)}{V+W+\frac{M}{2}+\frac{\varrho^2 m}{2r^2}}$.

Wenn ferner aus Beobachtungen der Raum s bekannt ist, welcher in der Zeit t von dem Gewichte V durchlaufen wurde: so erhält man nach §. 99.2) $g' = \frac{s}{t^2}$. Nun ist ferner mit Beyseitesetzung der Steifigkeit der Schnur $F = \frac{f\varrho}{r}$, und wenn φ den Reibungscoefficient [§. 31. Zus. IV.] bezeichnet, so ist $f = \varphi(V+W+M+m)$. Daher $\frac{s}{t^2} =$

$$g \cdot \frac{V-W-\varphi \cdot \frac{\varrho}{r}(V+W+M+m)}{V+W+\frac{M}{2}+\frac{\varrho^2 m}{2r^2}}, \text{ und hieraus}$$

$$\varphi = \frac{V-W-\frac{s}{gt^2}\left(V+W+\frac{M}{2}+\frac{\varrho^2 m}{2r^2}\right)}{\frac{\varrho}{r}(V+W+M+m)}.$$

Wird allein die Friction am Zapfen gesucht, so ist $\frac{s}{t^2} = g \cdot \frac{V-W-\frac{\varrho f}{r}}{V+W+\frac{M}{2}+\frac{\varrho^2 m}{2r^2}}$, und daher

$$f = \frac{r}{\varrho}\left[V-W-\frac{s}{gt^2}\left(V+W+\frac{M}{2}+\frac{\varrho^2 m}{2r^2}\right)\right].$$

Zusatz II. Hängt die Last W nicht frey herab, sondern liegt auf einer horizontalen Ebene und wird mittels des Gewichtes V, welches an einem über einer Rolle gelegten Faden wie Tab. II. Fig. 21. hängt, längs dieser Ebene fortgezogen: so ist, wenn man mit F die von W herrührende Friction, und mit F' die auf dem Umfange der Rolle reducirte Friction zwischen Zapfen und Pfanne nebst der Steifigkeit des Seils bezeichnet, die hier als bekannt angesehen werden kann, $g' = g \cdot \frac{V-F'-F}{V+W+\frac{M'}{2}}$ oder $F = V-F'-\frac{g'}{g}\left(V+W+\frac{M}{2}\right)$. Daher die von der Last W entstehende Friction auf einer horizontalen Ebene oder

$$F = V-F'-\frac{s}{gt^2}\left(V+W+\frac{M}{2}\right).$$

§. 118.

Aufgabe. Am Umfange eines Rades, dessen Halbmesser CD = a [Tab. III. Fig. 30.], ist eine Kraft P, deren Masse = M ist, angebracht, und am Umfange der zugehörigen Welle, deren Halbmesser CA = b ist, befindet sich eine Last Q, deren Masse = M' ist; ferner ist aP > bQ; man sucht die **Beschleunigungen** der Massen M und M'.

Auflösung. Das Moment der Trägheit der Welle und des Rades oder der ganzen Maschine sey $= z^2 A$, so findet man, wenn sämmtliche Massen auf den Halbmesser a reducirt werden [§. 115. Zus. III.], die Summe derselben $= M + \frac{z^2}{a^2} A + \frac{b^2}{a^2} \cdot M'$.

Die bewegende Kraft oder die Ueberwucht ist $= P - \frac{b}{a}(Q + F)$, wenn F die auf den Punct A reducirte Hindernißlast, nämlich Zapfenreibung, Seilesbiegung u. dergl. ist. Daher findet man die Beschleunigung der Masse M oder

1) $g' = g \cdot \frac{P - \frac{b}{a}(Q + F)}{M + \frac{z^2}{a^2} A + \frac{b^2}{a^2} M'}$, oder auch

$$g' = g \cdot a \cdot \frac{aP - b(Q + F)}{a^2 M + z^2 A + b^2 M'}.$$

Die Beschleunigung der Masse M' sey g'', so verhält sich g' : g'' = a : b [§. 40. Zus. II.], dieß gibt $g'' = \frac{b}{a} \cdot g'$. Daher

2) $g'' = g \cdot b \cdot \frac{aP - b(Q + F)}{a^2 M + z^2 A + b^2 M'}$.

Beyspiel. Es sey a = 6 Zoll, b = 1 Zoll, der Halbmesser des Zapfens der Rolle = ρ = 1 Linie, die Kräfte P und Q seyen herabhängende Ge-

wichte, und $P = M = 2$ Pfd., $Q = M' = 6$ Pfd.; ferner sey das Gewicht des Rades $= 2$ Pfd., der Welle $= 4$ Pfd., also $A = 6$ Pfd.: so ist die auf den Punct A reducirte Zapfenfriction (die Seilesbiegung bey Seite gesetzt) $= F = \varphi \cdot \frac{e}{b}(P + Q + A)$ $= 0{,}3 \cdot \frac{1}{12}(2 + 6 + 6) = \frac{0{,}3}{12} \cdot 14 = 0{,}35$ Pfd.

Das Trägheitsmoment des Rades ist nach §. 116. Zus. III. 11) $= \frac{2}{2}(6^2 + 1^2) = 37$, das Trägheitsmoment der Welle nach §. 116. Zus. III. 10) $= \frac{4}{2} \cdot 1^2 = 2$, also $z^2 A = 37 + 2 = 39$, $a^2 M$ $= 6^2 \cdot 2 = 72$, $b^2 M' = 1^2 \cdot 6 = 6$, daher die Beschleunigung der Masse M, d. i.

$$g' = 17{,}377 \cdot 6 \cdot \frac{6 \cdot 2 - 1 \cdot (6 + 0{,}35)}{72 + 39 + 6}$$
$$= 17{,}377 \cdot 6 \cdot \frac{5{,}65}{117} = 5{,}035 \text{ Fuß.}$$

Die Beschleunigung der Masse M' ist $g'' = \frac{b}{a} \cdot g' = \frac{1}{6} \cdot 5{,}035 = 0{,}839$ Fuß.

Das Gewicht P sinkt daher z. B. in 2 Secunden $= 5{,}035 \cdot 2^2 = 5{,}035 \cdot 4 = 20{,}14$ Fuß, und das Gewicht Q wird in dieser Zeit um $0{,}839 \cdot 2^2$ $= 0{,}839 \cdot 4 = 3{,}356$ Fuß hoch gehoben.

§. 119.

Aufgabe. An einem Räderwerke [Tab. III. Fig. 40.] befindet sich am ersten Rade in K die Kraft P, deren Masse $= M$ ist, und an der letztern Welle in H die Last Q, deren Masse $= M'$ ist; man sucht die Beschleunigungen der Massen M, M', wenn die Kraft P die Last Q und die Hindernißlast, welche an der Maschine vorkommt, überwiegt.

Auflösung. Man setze die Halbmesser der Räder $KD = R$, $LE = R'$, $GF = R''$, die Halb-

messer der Wellen oder Getriebe $DL = r$, $EG = r'$, $FH = r''$, die Momente der Trägheit von der ersten Welle und dem daran befindlichen Rade K, D $= x^2 \cdot A$, vom zweyten B, E $= y^2 A'$, vom dritten C, F $= z^2 \cdot A''$: so sind wiederum sämmtliche Massen auf den Punct K zu reduciren [§. 118.].

Für das erste Rad K und seine Welle D hat man das Moment der Trägheit $x^2 \cdot A$, dieses auf den Punct K gebracht, gibt $= \frac{x^2}{R^2} \cdot A$.

Für das zweyte Rad B und seine Welle E ist das Moment der Trägheit $y^2 \cdot A'$, dieses auf den Punct L reducirt, ist $= \frac{y^2}{R'^2} \cdot A'$, und auf den Punct K reducirt, gibt $= \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{y^2}{R'^2} \cdot A'$.

Die Masse des letzten Rades C nebst Welle F wird eben so auf den Punct K reducirt, und man erhält $= \frac{r^2 \cdot r'^2 \cdot z^2}{R^2 \cdot R'^2 \cdot R''^2} \cdot A''$.

Dasselbe gilt von der Masse der Last Q am Halbmesser r''. Diese Masse auf K reducirt, ist $= \frac{r^2 \cdot r'^2 \cdot r''^2}{R^2 \cdot R'^2 \cdot R''^2} \cdot M'$.

Die Summe aller auf den Punct K reducirten Massen ist daher =

$$M + \frac{x^2}{R^2} \cdot A + \frac{r^2 \cdot y^2}{R^2 \cdot R'^2} \cdot A' + \frac{r^2 \cdot r'^2 \cdot z^2}{R^2 \cdot R'^2 \cdot R''^2} \cdot A'' + \frac{r^2 \cdot r'^2 \cdot r''^2}{R^2 \cdot R'^2 \cdot R''^2} \cdot M'.$$

Die zur Ueberwältigung der gesammten Reibung an K erforderliche Kraft sey = F, so findet man die bewegende Kraft $= P - \frac{r \cdot r' \cdot r''}{R \cdot R' \cdot R''} \cdot Q - F$ [§. 49. 1), und hieraus die Beschleunigung des Gewichtes P oder

$$1)\ g' = g \times \frac{P - \frac{r \cdot r' \cdot r''}{R \cdot R' \cdot R''} \cdot Q - F}{M + \frac{x^2}{R^2} \cdot A + \frac{r^2 \cdot y^2}{R^2 \cdot R'^2} \cdot A' + \frac{r^2 \cdot r'^2 \cdot z^2}{R^2 \cdot R'^2 \cdot R''^2} \cdot A'' + \frac{r^2 \cdot r'^2 \cdot r''^2}{R^2 \cdot R'^2 \cdot R''^2} \cdot M'},$$

oder $g' = g \cdot R \cdot R' \cdot R'' \times \frac{RR'R''(P-F) - rr'r''Q}{R^2R'^2R''^2M + R'^2R''^2x^2A + R''^2r^2y^2A' + r^2r'^2z^2A'' + r^2r'^2r''^2M'}$.

Wenn g'' die Beschleunigung der Last Q ist, so verhält sich $g' : g'' = R \cdot R' \cdot R'' : r \cdot r' \cdot r''$ [§. 49. Zus. III.]. Daher die Beschleunigung der Last d. i. $g'' = \frac{r \cdot r' \cdot r''}{R \cdot R' \cdot R''} \cdot g$, oder

2) $g'' = g \cdot r \cdot r' \cdot r'' \times \frac{RR'R''(P-F) - rr'r''Q}{R^2R'^2R''^2M + R'^2R''^2x^2A + R''^2r^2y^2A' + r^2r'^2z^2A'' + r^2r'^2r''^2M'}$.

§. 120.

Erklärung. Die Kräfte, deren man sich zum Umtriebe der Maschinen bedient, sind selten, wie in den bisher betrachteten Fällen, unveränderlich, sondern meistentheils von der Art, daß sie mit zunehmender Geschwindigkeit der von ihnen angegriffnen Puncte entweder an Wirkung oder an absoluter Größe verlieren, und sich auf solche Weise mit der Last oder dem Widerstande, den sie zu überwinden haben, zuletzt ins Gleichgewicht setzen. Ehe dieß jedoch geschieht, ist die Geschwindigkeit der Maschine einem steten Wachsthum unterworfen, der aber in gleichem Maße wie die Ueberwucht der Kraft sich vermindert, nach und nach abnimmt, und am Ende, wenn Kraft und Last ins Gleichgewicht treten, gänzlich verschwindet, da dann die Geschwindigkeit bey einer gewissen Grenze, die sie erreicht hat, stehen bleibt, und die ganze Maschine in dem einmal erhaltnen Gange gleichförmig beharret, wenn nicht neue fördernde oder verzögernde Kräfte bey der Bewegung eintreten. Diesen Zustand der Maschine nennt man ihren Beharrungszustand.

Zusatz. Zu den veränderlichen Kräften, wodurch Maschinen in Bewegung gesetzt werden, gehören vorzüglich die Menschen- und Thierkräfte.

Nennt man allgemein in Pfunden Π die größte Kraft, die ein Mensch mit seinen Händen oder ein angespanntes Thier im Zuge ausüben kann, um eine Last, die etwa an einem über eine Rolle gelegten Seile angehängt ist, mehrere Stunden lang ruhig zu erhalten, ferner c die größte Geschwindigkeit, mit welcher ein Mensch seine Hände, oder ein Thier sich lastleer bewegen kann: so bestätigt die Erfahrung für die Menschenkraft bey einer Geschwindigkeit $v < c$ folgenden Werth, nämlich $= \Pi\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$, für n Menschen daher die Kraft

1) $P = n\Pi\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$. Hieraus folgt

2) $v = c \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{P}{n\Pi}\right)}$, und

3) $n = \frac{P}{\Pi\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$.

Für Thierkräfte beym Zuge stimmt jedoch folgender Werth mit der Erfahrung mehr überein, nämlich für n Thiere

4) $P = n\Pi\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2$. Hieraus folgt

5) $v = c\left(1 - \sqrt{\frac{P}{n\Pi}}\right)$, und

6) $n = \frac{P}{\Pi\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}$.

Um nun diese Art von Kräften zu berechnen, so ist für

	Menschen	Esel	Maulthiere	Pferde	Ochsen
Π =	50 b. 60 Pf.	100 Pfd.	210 Pfd.	420 Pfd.	480 Pfd.
c =	6 Fuß.	6 Fuß.	9 Fuß.	12 Fuß.	5 Fuß.

In dem Werthe für die Menschenkraft gilt $\Pi = 50$ Pfd., wenn der Mensch eine Kurbel umdreht, s. neues bergmännisches Journal von C. A. S. Hoffmann, 4ter Band, Freyberg 1815. S. 185.; soll hingegen der Mensch etwas vor sich herschieben, so ist $\Pi = 60$ Pfd.

In dem Werth 1) wird das mechanische Moment [§. 19. Zus. III.] der Kraft am größten für $v = \frac{c}{\sqrt{3}} = 0{,}5773 \cdot c$, und in dem Ausdruck 4) für $v = \frac{c}{3} = 0{,}3333 \cdot c$.

Anmerkung. Zur Erläuterung des §. 120. diene folgende Aufgabe.

§. 121.

Aufgabe. An einem zweymännschen Haspel, welcher über einem Schachte steht, dessen Tonnlage 72° ist, sey die Höhe des Haspelhorns = a = 18 Zoll = 1,5 Fuß, der Durchmesser des Rundbaums 8 Zoll, die Seilesstärke $\frac{3}{4}$ Zoll, folglich die Lastentfernung = b = 4,375 Zoll = 0,364 Fuß; ferner sey der Halbmesser der Zapfen am Rundbaum = 0,3 Zoll, das Gewicht des Rundbaums = G' = 76 Pfd., das Gewicht eines Haspelhorns = G'' = 12 Pfd., das Gewicht eines leeren Kübels = 40 Pfd., das Gewicht der Fördermasse = 120 Pfd., also das Gewicht zweyer Kübel und der Fördermasse = M' = 200 Pfd. Man sucht die für den Beharrungszustand des Haspels mögliche Geschwindigkeit, mit welcher zwey Haspelknechte das Haspelhorn umdrehen, angenommen, daß die Kraft der beyden Haspelknechte in dem Kurbelkreise auf einer Bogenlänge = s = $\frac{1}{2}$ Zoll = 0,0416 Fuß als eine unveränderliche Kraft [§. 120.] angesehen werden kann.

Auflösung. Um die Aufgabe zu lösen, so sind zuerst nach dem Beyspiel des §. 42. die statischen Widerstände zu berechnen, welche die Last, so die Kraft zu überwinden hat, ausmachen. Weil die hier angegebene Aufgabe dasselbe in §. 42. Zus. III. gegebne Beyspiel ist: so beträgt nach den dortigen Berechnungen die zu überwindende Last Q = 162,7 Pfd.

Nach §. 118. 1) ist nun die Beschleunigung der Kraft

$$g' = g \cdot a \cdot \frac{aP - bQ}{a^2M + z^2A + b^2M'},$$

wenn man hier unter Q das dortige $Q+F$, unter M, A, M' wie dort die Massen der Kraft, der Maschine und der Last verstehet.

Nach der hier aufgestellten Aufgabe ist nun die Masse der Kraft $M = 0$; A aber sind die Massen der zu bewegenden Maschinentheile, nämlich des Rundbaums und der beyden Haspelhörner, deren Trägheitsmomente daher $= b^2 \cdot \frac{G'}{2}$ [§. 116. Zus. III. 10) und $= 2a^2 \cdot \frac{G''}{3}$ [§. 116. Zus. III. 4)]; M' ist das absolute Gewicht der beyden Kübel und der Fördermasse, und P die Kraft der Haspelknechte, nämlich $= n\Pi\,(1 - \frac{v^2}{c^2})$ [§. 120. Zus. 1)]. Daher für diese Aufgabe eingerichtet die Beschleunigung der Kraft

$$g' = g \cdot a \cdot \frac{a \cdot n\Pi\,(1 - \frac{v^2}{c^2}) - bQ}{b^2\,(M' + \frac{G'}{2}) + 2a^2 \cdot \frac{G''}{3}}.$$

Angenommen, daß die Kraft der Haspelknechte durch einen Bogen $= s = 0{,}0416$ Fuß als eine unveränderliche oder beständige Kraft wirken soll: so ist, wenn man die anfängliche Geschwindigkeit der Kraft $= v$ nennt, die Geschwindigkeit der Kraft am Ende jeder durchlaufnen Bogenlänge s =

$$\mathfrak{v} = \sqrt{\left[v^2 + 4g \cdot a \cdot \frac{a \cdot n\Pi\,(1 - \frac{v^2}{c^2}) - bQ}{b^2\,(M' + \frac{G'}{2}) + 2a^2 \cdot \frac{G''}{3}} \cdot s\right]}\ [\text{§. 107. Zus. VIII. 3)}],\ \text{oder}$$

$$\mathfrak{v} = \sqrt{\left[v^2 + \frac{4g \cdot a \cdot s}{b^2(M' + \frac{G'}{2}) + 2a^2 \cdot \frac{G''}{3}} \cdot \left[a \cdot n\Pi\,(1 - \frac{v^2}{c^2}) - b \cdot Q\right]\right]},$$

wo $\frac{4g \cdot a \cdot s}{b^2(M' + \frac{G'}{2}) + 2a^2 \cdot \frac{G''}{3}}$ eine constante Größe $= m$ ist, und also

$$\mathfrak{v} = \sqrt{\left[v^2 + m \cdot [a \cdot n\Pi\,(1 - \frac{v^2}{c^2}) - b \cdot Q)]\right]}$$

wird.

Aus diesem Werth für v lässt sich ersehen, daß v immerfort wachsen muß, so lange $a \cdot n\Pi\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) > bQ$ bleibt, so bald aber $a \cdot n\Pi\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = bQ$ oder $a \cdot n\Pi\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - bQ = 0$ wird, $v = \sqrt{v^2} = v$ bleibt, und daher die gleichförmige Bewegung oder der Beharrungszustand der Maschine dann anfängt oder eintritt, wenn die Kraft dahin gelangt ist, wo sie der Last das Gleichgewicht halten würde, wenn sich dieselbe noch in Ruhe befände.

Nach der Aufgabe hier ist nun

$$m = \frac{4g \cdot a \cdot s}{b^2\left(M' + \frac{G'}{2}\right) + 2a^2 \cdot \frac{G''}{3}}$$
$$= \frac{4 \cdot 17{,}377 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}0416}{0{,}364^2\left(200 + \frac{76}{2}\right) + 2 \cdot 1{,}5^2 \cdot \frac{12}{3}}$$
$$= \frac{4 \cdot 17{,}377 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}0416}{0{,}364^2 \cdot 238 + 1{,}5^2 \cdot 8} = 0{,}08758.$$

Am Ende des ersten s, wo die anfängliche Geschwindigkeit $v = 0$ ist, ist daher

$$v = \sqrt{\left[0{,}08758 \cdot [1{,}5 \cdot 2 \cdot 50 - 0{,}364 \cdot 162{,}7]\right]}$$
$$= \sqrt{[0{,}08758 \cdot (150 - 59{,}22)]}$$
$$= \sqrt{(0{,}08758 \cdot 90{,}78)} = 2{,}819 \text{ Fuß}.$$

Am Ende des zweyten s ist

$$v = \sqrt{\left[2{,}819^2 + 0{,}08758 \cdot \left[1{,}5 \cdot 2 \cdot 50\left(1 - \frac{2{,}819^2}{6^2}\right) - 59{,}22\right]\right]}$$
$$= \sqrt{\left[2{,}819^2 + 0{,}08758 \cdot [150\,(1 - 0{,}22) - 59{,}22]\right]}$$
$$= \sqrt{[2{,}819^2 + 0{,}08758 \cdot (150 \cdot 0{,}78 - 59{,}22)]}$$
$$= \sqrt{[2{,}819^2 + 0{,}08758 \cdot 57{,}78]}$$
$$= 3{,}606 \text{ Fuß}.$$

Rechnet man auf diese Weise fort, so ist

am Ende des	v =	Zunahme der Geschwindigkeit =	Ueberwuchtsmoment =
1sten s	2,819 Fuß.	2,819 Fuß.	90,78
2ten s	3,606 „	0,787 „	57,78
3ten s	4,028 „	0,422 „	36,78
4ten s	4,274 „	0,246 „	23,28
5ten s	4,432 „	0,158 „	15,78
6ten s	4,528 „	0,096 „	9,78
7ten s	4,579 „	0,051 „	5,28
8ten s	4,615 „	0,036 „	3,78
9ten s	4,636 „	0,021 „	2,28
10ten s	4,643 „	0,007 „	0,78
11ten s	4,643 „	0,000 „	0,78

Die dem Beharrungszustand zukommende Geschwindigkeit ist daher = 4,643 Fuß, d. h. nachdem die Haspelknechte die Kurbeln durch einen Bogen von $\frac{11}{2}$ = 5,5 Zollen gedreht haben: so tritt der Beharrungszustand der Maschine ein, die Bewegung derselben wird eine gleichförmige, und die Geschwindigkeit der Maschine bleibt sich nun gleich.

Zusatz I. Nennt man einen sehr kleinen Zeittheil = t, z. B. t = 0,01 Secunde an, durch welchen die Kraft der Haspelknechte als eine unveränderliche angesehen werden kann: so findet man nach §. 107. Zus. VIII. 1) für den angenommenen Zeittheil die gleichförmige Geschwindigkeit auf eine ähnliche Weise, wenn man allgemein

$$\mathfrak{v} = v + 2g \cdot a \cdot \frac{a \cdot n\Pi \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - b \cdot Q}{b^2 \left(M' + \frac{G'}{2}\right) + 2a^2 \cdot \frac{G''}{3}} \cdot t$$

$$= v + \frac{2g \cdot a \cdot t}{b^2 \left(M' + \frac{G'}{2}\right) + 2a^2 \cdot \frac{G''}{3}} \cdot \left[a \cdot n\Pi \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - bQ\right], \text{ oder}$$

$$\mathfrak{v} = v + m \cdot \left[a \cdot n\Pi \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - bQ\right]$$

setzt, wo v die anfängliche Geschwindigkeit der Kraft bedeutet.

Nach der Aufgabe ist nun $m = \frac{2 \cdot 17{,}377 \cdot 1{,}5 \cdot 0{,}01}{0{,}364^2 \cdot 238 + 1{,}5^2 \cdot 8}$ $= 0{,}01052$.

Am Ende des ersten t, wo die anfängliche Geschwindigkeit $v = 0$ ist, ist also

$v = 0{,}01052\ [1{,}5 \cdot 2 \cdot 50 - 0{,}364 \cdot 162{,}7]$
$= 0{,}01052\ (150 - 59{,}22)$
$= 0{,}01052 \cdot 90{,}78 = 0{,}955$ Fuß.

Am Ende des zweyten t ist die Geschwindigkeit der Kraft

$v = 0{,}955 + 0{,}01052 \cdot [150\,(1 - \frac{0{,}955^2}{36}) - 59{,}22]$
$= 0{,}955 + 0{,}01052 \cdot (150 \cdot 0{,}97 - 59{,}22)$
$= 0{,}955 + 0{,}01052 \cdot 86{,}28 = 0{,}955 + 0{,}908$
$= 1{,}863$ Fuß.

Rechnet man nun ebenfalls auf diese Weise fort, so ist

am Ende des	v =	Zunahme der der Geschwindigkeit =	Ueberwuchtsmoment =
1sten t	0,955 Fuß.	0,955 Fuß.	90,78
2ten t	1,863 „	0,908 „	86,28
3ten t	2,676 „	0,813 „	77,28
4ten t	3,331 „	0,655 „	62,28
5ten t	3,812 „	0,481 „	45,78
6ten t	3,136 „	0,324 „	30,78
7ten t	3,349 „	0,213 „	20,28
8ten t	4,483 „	0,134 „	12,78
9ten t	4,570 „	0,087 „	8,28
10ten t	4,609 „	0,039 „	3,78
11ten t	4,633 „	0,024 „	2,28
12ten t	4,641 „	0,008 „	0,78
13ten t	4,641 „	0,000 „	0,78

Hieraus ergibt sich denn, daß der Beharrungszustand des Haspels am Ende des 13ten t eintritt, und die gleichförmige Geschwindigkeit $v = 4{,}641$ Fuß ist, welches von erstrer gefundnen nur um $4{,}643 - 4{,}641 = 0{,}002$ Fuß verschieden ist.

Zusatz II. Weil also der Beharrungszustand einer Maschine dann eintritt, wenn Kraft und Last gegen einander ins Gleichgewicht treten, so wird man nach §. 120. Zus. für den Beharrungszustand und für die Ausübung genau genug auch die gleichförmige Geschwindigkeit finden, wenn man die der statischen Kraft $= P = \frac{b}{a} \cdot Q$ zugehörige Geschwindigkeit angibt. Nach der Aufgabe hier ist nun $P = \frac{b}{a} \cdot Q = \frac{4{,}375}{18} \cdot$

162,7 = 39,5 Pf., daher nach §. 120. Zus. 2) die Geschwindigkeit der Kraft

$$v = c \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{P}{nS}\right)} = 6 \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{39,5}{100}\right)}$$
$$= 6 \cdot \sqrt{(1 - 0,3950)} = 6 \cdot \sqrt{0,6050}$$
$$= 6 \cdot 0,77 = 4,62 \text{ Fuß.}$$

Zusatz III. Wären die Tiefe des Schachtes = S = 6 Fahrten oder 144 Fuß [s. Arithm. Beylage I.], und die Stillstandszeit des Haspels (Zeit zum Anschlagen und Aushängen der Kübel) etwa = 1 Minute gegeben: so kann man nun angeben, wie viel Kübel die vorigen beyden Haspelknechte in einer Zeit, etwa von sechs Stunden fördern können. Denn da man nun nach dem Vorhergehenden die Geschwindigkeit der Kraft, nämlich v = 4,62 Fuß weiß, so ist der Last Geschwindigkeit $v' = \frac{b}{a} \cdot v = \frac{4,375}{18} \cdot 4,62 = 1,12$ Fuß. Die Zeit, in welcher ein Kübel vom Füllort bis an die Hängebank gebracht wird, ist $= \frac{S}{v'}$ [§. 90.3) $= \frac{144}{1,12} = 128$ Secunden. Rechnet man nun auf jeden Kübel 1 Minute = 60 Secunden Stillstandszeit: so kommen auf jeden Kübel Zeitaufwand = 128 + 60 = 188 Secunden; und es können daher die beyden Haspelknechte mit diesem Haspel, in 6 Stunden = 21600 Secunden, $\frac{21600}{188} = 115$ Kübel fördern.

Zusatz IV. Für den **gleichförmigen Beharrungszustand** einer Maschine sind demnach die **statischen oder mechanischen Momente der Kraft und Last einander gleich.**

Beyspiel. Bey einem Haspel drehen die Haspelknechte das Haspelhorn in der Minute 31 Mal um, wenn nun die Höhe des Haspelhorns = 18 Zoll = 1,5 Fuß, die Entfernung der Last = 4,4 Zoll, die Stillstandszeit der Maschine 1 Minute beträgt, und der Schacht 6 Fahrten oder 144 Fuß tief ist: wie viel Kübel werden die Haspelknechte in 6 Stunden ziehen?

Auflösung. Weil für den Beharrungszustand sowohl die statischen als mechanischen Momente der Kraft und Last gleich sind, folglich diese Kräfte sich umgekehrt wie ihre Entfernungen sowohl, als ihre Geschwindigkeiten, verhalten: so sind demnach die Geschwindigkeiten der Kräfte in dem geraden Verhältniß ihrer Entfernungen. Die Geschwindigkeit der Kraft ist aber $= \frac{31 \cdot 2 \cdot 1,5 \cdot 3,141}{60} = 4,869$ Fuß, folglich die Geschwindigkeit der Last $= \frac{4,4}{18} \cdot 4,869 = 1,19$ Fuß, und es wird also

ein Kübel vom Füllort an die Hängebank gebracht in $= \frac{144}{1,19}$ $= 120$ Secunden. Weil nun die Stillstandszeit nach jedem aufgezognen Kübel 1 Minute oder 60 Secunden betragen soll: so würden daher die Haspelknechte in 6 Stunden oder 21600 Secunden $= \frac{21600}{120+60} = \frac{21600}{180} = 120$ Kübel fördern.

Eben solche Rechnungen lassen sich auf gleiche Weise beym Pferdegöpel machen.

Anmerkung I. Bey den Berechnungen in §. 121. und dessen Zus. I. wurde nun freylich angenommen, daß die Haspelknechte gleich anfänglich mit einer Kraft von 100 Pfd., jeder nämlich mit 50 Pfd. auf das Haspelhorn drücken, woraus sich sodann öfters eine anfängliche beträchtliche Geschwindigkeit ergibt, welche auf den anfänglich ruhenden Kübel einen nachtheiligen Eindruck machte, indem nämlich das Seil vom Quenzel leicht abspringen würde. Daher kommt es denn, daß die Haspelknechte anfänglich mit einer geringern Kraft in das Haspelhorn wirken, oder wie man zu sagen pflegt, den Kübel erst anholen, wodurch sie also den Kübel nach und nach Geschwindigkeit mittheilen. Allein weil sich in diesem Falle für die anfängliche Kraft der Haspelknechte nichts Sicheres annehmen läßt: so kann man die Rechnung so stellen, als ob die Haspelknechte gleich beym Anfange der Förderung ihren ganzen Druck auf das Haspelhorn ausübten, indem die Annahme einer anfänglichen kleinern Kraft eben keine großen Abänderungen der Geschwindigkeit für den Beharrungszustand der Maschine gibt.

Anmerkung II. Wollte man für das Beyspiel zum Laufrade des §. 40. Zus. III. die für den Beharrungszustand gehörige Geschwindigkeiten finden: so muß man in der Formel für die Menschenkraft des §. 120. Zus. für Π das Gewicht der Menschen, welche im Laufrade arbeiten, und für die lastleere Geschwindigkeit $c = 3$ Fuß setzen. Für das §. 40. Zus. IV. berechnete Beyspiel wäre daher die gleichförmige Geschwindigkeit, mit welcher zwey Menschen das Rad dreheten, d. i. $v = 3 \cdot \sqrt{(1 - \frac{216}{300})} = 3 \cdot 0,52 = 1,56$ Fuß, weil die vertical niederwärts drückende Kraft $P = 216$ Pfd. für den Beharrungszustand der Maschine seyn muß. Die Geschwindigkeit des Lastpunctes demnach $= \frac{1,29}{12} \cdot 1,56 = 0,17$ Fuß.

Eben so kann für Thiere gerechnet werden, wenn man in der Formel für die Menschenkraft statt Π das Gewicht des Thieres, und für c die Hälfte der in der Tabelle des §. 120. Zus. angegebnen Geschwindigkeit setzt.

Anmerkung III. Weitere Ausführungen über das Bisherige gehören in die Maschinenlehre.

Achtes Kapitel.

Vom Pendel.

§. 122.

Erklärung. Wenn ein schwerer Körper an einem Faden oder einer Stange so aufgehangen wird, daß er sich hin- und herschwingen kann: so heißt diese Einrichtung ein Pendel.

Wird der Körper als ein schwerer Punct betrachtet, und dem Faden kein Gewicht zugeschrieben: so entsteht ein einfaches, sonst aber ein zusammengesetztes Pendel.

Erhebt man den schweren Theil des Pendels, so daß er sich in einer verticalen Ebene hin- und herschwingt: so nennt man einen Hin- oder Rückgang einen Schwung oder Pendelschlag, und die Abweichung des Fadens von der Verticale bey der Erhebung den Elongationswinkel.

Zusatz. Das vertical hängende Pendel CA [Tab. VI. Fig. 76.] werde bis B erhoben, so fällt es im Bogen BA vermöge seiner Schwere herunter. Durch den Fall hat es aber in A eine Geschwindigkeit erlangt, welche der Höhe EA zugehört, weshalb es, wenn seiner Bewegung keine Hindernisse entgegen stehen, wieder durch den Bogen AD = AB in die Höhe steigen muß [§. 112. Anmerkung II.]. Der Elongationswinkel ACB ist alsdann = ACD [Geom. §. 142.], und das Pendel muß fortwährend in gleichen Zeiten einen Schwung durch den Bogen BAD oder DAB machen.

§. 123.

Lehnsatz. Für das einfache Pendel findet man (in Secunden) die Zeit t eines Schwunges, wenn der Elongationswinkel nicht über 15 Grad beträgt, und die Länge des Pen-

dels $= l$ gesetzt wird, $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}}$, wo $\pi = 3{,}141\ldots$ und g die Beschleunigung der Schwere [§. 98.] bedeutet.

Anmerkung. Der Beweis des vorstehenden Ausdruckes lässt sich mit hinlänglicher Schärfe nur durch die höhere Analysis geben, woraus sich nun die folgenden Aufgaben lösen lassen.

Beyspiel. Wenn ein Pendel 3 Leipziger Fuß lang und in unsrer Gegend $g = 17{,}377$ Leipz. Fuß ist, so ist die Zeit eines Schwunges $= 3{,}141 \cdot \sqrt{\frac{3}{2 \cdot 17{,}377}} = 0{,}92$ Secunden.

§. 124.

Aufgabe. Für das Secundenpendel die Länge l zu bestimmen.

Auflösung. Hier ist $t = 1$, folglich nach §. 123. $\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}} = 1$, oder $\pi^2 \cdot \frac{l}{2g} = 1$. Daher $l = \frac{2g}{\pi^2}$.

Beyspiel. Wenn in unsrer Gegend $g = 17{,}377$ Leipz. Fuß beträgt, so ist bey uns die Länge eines Secundenpendels $= \frac{2 \cdot 17{,}377}{(3{,}141)^2} = 3{,}522$ Leipziger Fuß.

§. 125.

Aufgabe. Die Beschleunigung der Schwere g [§. 97. 98.] an jedem Orte der Erde aus der Länge des Pendels zu bestimmen.

Auflösung. Nach §. 123. ist $t^2 = \pi^2 \cdot \frac{l}{2g}$, folglich $g = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{t}\right)^2$.

Zusatz. Ist l die nach §. 124. oder durch Beobachtung gefundne Länge des Secundenpendels: so ist $t = 1$, und daher $g = \frac{l}{2} \cdot \pi^2$.

Anmerkung. Herr Prof. D. Steinhäuser stellt in dem deutschen Gewerbsfreund, herausgegeben von K. W. G.

Kastner, dritten Bandes 5tes Heft, Halle 1817. S. 153. für die Länge des einfachen Secundenpendels $=$ L in Pariser Linien die Formel auf: $L = 440,3505 - 1,2448 \cdot \cos 2\lambda$, wo λ die geographische Breite des Orts bedeutet. Für Freyberg wäre daher die Länge des Secundenpendels $= L = 440,3505 - 1,2448 \cdot \cos \cdot 2 \cdot (50°, 55', 24'') = 440,3505 + 0,2557 = 440,6062$ Pariser Linien $= 3,0597$ Pariser Fuß $= \frac{144}{125,1} \cdot 3,0597 = 3,522$ Leipz. Fuß, und die Beschleunigung der Schwere $= g = \frac{1}{2} \cdot \pi^2 = \frac{3,522 \cdot (3,141)^2}{2} = 17,377$ Leipz. Fuß, welches mit dem Beyspiel zu §. 124. sehr übereinstimmt.

§. 126.

Aufgabe. **Für einerley Beschleunigung der Schwere g die Pendellängen L, l mit der Zahl der Schwingungen m, n in einerley Zeit zu vergleichen.**

Auflösung. In T Secunden mache ein Pendel, dessen Länge L ist, m Schwingungen; ein andres, dessen Länge l ist, n Schwingungen.

Da für einen Schlag $t = \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}$ [§. 123.], so ist für m Schläge $T = m \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}$, und für n Schläge $T = n \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}}$. Demnach ist $m \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}} = n \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{2g}}$, folglich $m \cdot \sqrt{L} = n \cdot \sqrt{l}$, oder $m^2 \cdot L = n^2 \cdot l$. Daher $L : l = n^2 : m^2$, d. h. die Pendellängen stehen im verkehrten quadratischen Verhältnisse der Schwingungszahlen in einerley Zeit und bey einerley Beschleunigung der Schwere.

Anmerkung. Ein kürzeres Pendel schwingt daher geschwinder als ein längeres.

§. 127.

Aufgabe. **Die verschiednen Beschleunigungen der Schwere g, g' mit den Pendellän-**

gen L, l und Schwingungszeiten T, t zu vergleichen.

Auflösung. Nach §. 125. ist $g = \frac{L}{2} : \left(\frac{\pi}{T}\right)^2 = \frac{L \cdot \pi^2}{2T^2}$, daher $g' = \frac{l \cdot \pi^2}{2t^2}$. Demnach $g : g' = \frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2}$.

Zusatz I. Für $T = t$, oder $T = t = 1$ ist $g : g' = L : l$; daher zeigt sich ein Mittel, die Schwere an verschiednen Orten der Erde zu vergleichen.

Beyspiel. Die Parisier Academie ertheilte im Jahre 1671. dem Herrn Richer unter andern den Auftrag, bey seinem Aufenthalte auf der Insel Cayenne, welche bey Südamerika nur 5° nordwärts vom Aequator liegt, die dortige Länge des Secundenpendels zu untersuchen. Richer fand im Jahre 1672., daß das Secundenpendel auf der Insel Cayenne um $1\frac{1}{4}$ Linie kürzer sey als in Paris, wo es 440 Linien lang war. Hieraus folgt, die Schwere ist in der Gegend des Aequators geringer als in Paris, und zwar im Verhältnisse von 440 : 438,75 = 1 : 0,99715; so daß also, wenn man die Beschleunigung der Schwere in Paris, nämlich $g = 1$ setzt, die Schwere um den Aequator nach Richers Erfahrungen = 0,99715 ist.

Zusatz II. Nach §. 126. müssen an einem Orte, wo die Beschleunigung der Schwere = g und die Pendellänge L ist, in der Zeit = T Schwingungen gemacht werden $= m = \frac{T}{\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}}$. Wenn nun eben das Pendel an einem andern Orte, wo die Beschleunigung der Schwere $= g'$ ist, in eben der Zeit m' Schwingungen macht: so ist $m' = \frac{T}{\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g'}}}$. Demnach ist $m : m' = \frac{T}{\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g}}} : \frac{T}{\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{2g'}}}$, oder $m^2 : m'^2 = g : g'$, d. h. **die Beschleunigungen der Schwere an verschiedenen Orten verhalten sich wie die Quadrate der Schwingungszahlen.**

Beyspiel. Richers Pendeluhr hatte in Paris täglich 24 · 60 · 60 = 86400 Secunden geschlagen. In Cayenne ging sie täglich um 2 Minuten = 120 Secunden zu langsam, schlug

also nur 8628omal. Hier ist $m : m' = 8640 : 8628 = 722 : 719$, also die Schwere in Paris zur Schwere in Cayenne $= 722^2 : 719^2 = 1 : 0,99722$. Eben so verhalten sich auch die Secundenpendel an beyden Orten.

Zusatz III. Nach §. 127. ist $g : g' = \frac{L}{T^2} : \frac{l}{t^2}$. Ist nun $L = l$, so ist $g : g' = t^2 : T^2$.

Zusatz IV. Die zusammengesetzten Pendel erfordern eine weitere Ausführung des vorhergehenden Kapitels. Soll ein dergleichen Pendel Secunden schlagen, und es ist das Gewicht der prismatischen Stange N, das Gewicht des daran hängenden schweren linsenförmigen Körpers $= M$, und die Länge des einfachen Secundenpendels $= l$: so muß die **Entfernung des Aufhängepunctes vom Mittelpuncte der Linse** $= e = \frac{M + \frac{1}{2}N}{M + \frac{1}{3}N} \cdot l$ seyn, vorausgesetzt, daß die Linse nur klein ist.

Beyspiel. Es sey die Länge des Secundenpendels $= l = 441$ Linien, das Gewicht der Stange $N = 18$ Loth, das Gewicht der Linse $M = 3$ Loth: so ist $e = \frac{3+9}{3+6} \cdot 441 = \frac{12}{9} \cdot 441 = 588$ Linien, und das Pendel schwingt nun wie ein einfaches.

V.

Erste Gründe der Hydraulik.

§. 128.

Erklärung. Die Hydraulik ist die Wissenschaft von den allgemeinen Gesetzen der Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten, vorzüglich des Wassers, und untersucht daher nicht nur die zu seiner Bewegung erforderlichen Kräfte, als auch die aus der Bewegung desselben entstehenden Wirkungen.

Anmerkung. Das nothwendigste Erforderniß für die Hydraulik sind genaue Versuche; aber gerade hieran fehlt es, der so vielfach angestellten ungeachtet, dennoch am meisten, so daß manche Versuche, aus welchen Regeln abgeleitet werden sollen, nicht immer hinreichen, um davon mit Sicherheit in der Ausübung Gebrauch machen zu können. Es haben zwar mehrere der ersten Gelehrten die Hydraulik sehr erweitert, allein sie steht dennoch gegen die ihr verschwisterten mathematischen Wissenschaften immer noch zurück.

Erstes Kapitel.
Von dem Ausflusse des Wassers durch Oeffnungen in dem Boden oder in den Wänden eines Behälters.

§. 129.

Erklärung. Befindet sich in dem horizontalen Boden eines Gefäßes eine Oeffnung, so heißt solche eine **horizontale**, sonst aber eine Seitenöffnung.

Die verticale Höhe des Wasserspiegels über einer horizontalen Oeffnung, oder die lothrechte Entfernung des zwischen dem Mittelpuncte des Druckes einer über einer Seitenöffnung sich denkbaren flüssigen Säule und dem horizontalen Wasserspiegel heißt die **Druckhöhe**.

Zur Bestimmung der **Wassermenge**, welche aus einer Oeffnung läuft, nimmt man eine gewisse Zeit als Einheit an, gewöhnlich eine Secunde; und weil unter Geschwindigkeit eines Körpers derjenige Weg verstanden wird, welchen er in einer Secunde gleichförmig durchläuft: so ist die **Geschwindigkeit** des Wassers mit der Länge desjenigen Strahls, welcher in einer Secunde ausfließt, einerley. Wenn daher die durchaus gleiche Geschwindigkeit $= c$, mit welcher das Wasser aus einer Oeffnung läuft, bekannt ist: so findet man daraus die Wassermenge $= M$, welche in einer Secunde ausfließt, wenn die Größe der Oeffnung $= a$ mit der Geschwindigkeit $= c$ multiplicirt wird, oder

1) $M = a \cdot c$.

Für irgend eine Zeit $= t$, welche in Secunden gegeben ist, erhält man hiernach die Wassermenge $t \cdot M = t \cdot ac$. Das Gewicht $= P$ der Wassermenge M, wenn das Gewicht eines Cubikfusses $= \gamma$ bekannt ist, hat man durch

$$2)\ P = M\gamma.$$

§. 130.

Lehrsatz. Bey horizontalen Oeffnungen verhalten sich die Geschwindigkeiten des ausfließenden Wassers wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen.

Beweis. Man setze, daß bey zwey verschiedenen Gefäßen h, H die unveränderten Druckhöhen, a, A die Flächeninhalte der Ausflußöffnungen, c, C die Geschwindigkeiten bezeichnen, mit welchen das Wasser im Beharrungszustande durch die Oeffnungen ausläuft: so entsteht offenbar bey derjenigen Oeffnung ein größerer Druck auf jedes ausfließende Wassertheilchen, über welchem sich eine größere Wasserhöhe befindet, weshalb auch eine größere Geschwindigkeit bey dem Ausflusse erzeugt werden muß. Wenn die Wassertheilchen die Oeffnung verlassen: so hört zwar nach und nach dieser Druck auf; aber im Augenblicke des Ausflusses, in irgend einer (wenn auch noch so kleinen) Zeit t, muß der Druck, welcher von der Wasserhöhe herrührt, auf die ausfließenden Wassertheile wirken; und es lassen sich daher die Gewichte der Wassersäulen $ah\gamma$, $AH\gamma$ als bewegende Kräfte ansehen, welche die in gleichen Zeiten ausfließenden Wassermassen gleichförmig beschleunigen. Haben daher beyde Massen in der Zeit t ihre Geschwindigkeiten

c, C, mit welchen sie ausfließen, erhalten: so ist das Gewicht der in dieser Zeit ausfließenden Wassermengen tacγ, tACγ, und daher das Verhältniß ihrer beschleunigenden Kräfte $= \frac{ah\gamma}{tac\gamma} : \frac{AH\gamma}{tAC\gamma}$ [§. 107. Zus. V.] $= \frac{h}{c} : \frac{H}{C}$.

Nun verhalten sich aber die beschleunigenden Kräfte wie die in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten [§. 107. Zus. VII.], daher $\frac{h}{c} : \frac{H}{C} = c : C$ oder $h : H = c^2 : C^2$, also auch $c : C = \sqrt{h} : \sqrt{H}$.

Anmerkung. Dieser a priori dargethane Satz stimmt auch sehr nahe mit der Erfahrung überein. So fand z. B. Bossut, daß durch eine 1 Zoll im Durchmesser habende kreisförmige Oeffnung in gleicher Zeit, bey einer Druckhöhe

von 1 Fuß, 2722 Par. Cubikzoll
„ 4 „ 5436 „ „
„ 9 „ 8135 „ „

Wasser ausflossen. Weil sich nun die Wassermengen wie die Geschwindigkeiten, und diese wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten: so müsse seyn $\sqrt{1} : \sqrt{4} : \sqrt{9}$ oder $1 : 2 : 3 = 2722 : 5436 : 8135$, welches auch mit einer geringen Abweichung, so weit es die Genauigkeit bey dergleichen Versuchen zuläßt, eine gute Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung zeigt.

Zusatz I. Weil die Geschwindigkeit des ausfließenden Wassers von der Druckhöhe abhängt, so sieht man ein, daß bey Seitenöffnungen, wo jeder horizontale Streifen eine andere Wasserhöhe hat, die Geschwindigkeiten in der Oeffnung verschieden seyn müssen. Denkt man sich nun unter allen Geschwindigkeiten eine solche, bey der eben so viel Wasser ausflösse wie bey den verschiednen, so heißt diese die **mittlere Geschwindigkeit**, und diejenige Wasserhöhe, welche dieser mittlern Geschwindigkeit zugehört, ihre **Geschwindigkeitshöhe**, welche man auch die **Druckhöhe** der Seitenöffnung nennen kann.

Wenn die lothrechte Höhe einer Seitenöffnung in Bezug auf die lothrechte Entfernung des Wasserspiegels von dieser Oeffnung nur klein ist, so können auch die Geschwindigkeiten in der Oeffnung nicht sehr von einander abweichen; und man

nimmt in solchen Fällen die Entfernung des Schwerpunctes der Oeffnung vom Wasserspiegel als Geschwindigkeitshöhe an.

Zusatz II. Beym freyen Falle der Körper hängt ihre erlangte Geschwindigkeit von der Höhe ab, von welcher sie gefallen sind [§. 96. Zus. I. und §. 99.3)]. Weil nun ebenfalls bey der Bewegung des Wassers durch eine Oeffnung die Geschwindigkeiten desselben sich wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten [§. 130.]: so sieht man, daß zwischen dem freyen Fall der Körper und der Bewegung des Wassers durch Oeffnungen eine gewisse Uebereinstimmung in Hinsicht der zugehörigen Höhen und erlangten Geschwindigkeiten Statt finde. Für eine ganz freye und ungehinderte Bewegung des Wassers ist man berechtigt, eben die Gesetze wie beym freyen Falle fester Körper anzunehmen. Wenn aber Wasser durch eine Oeffnung ausläuft: so sind nach den verschiednen Gestalten, welche eine Oeffnung haben kann, die Geschwindigkeiten in derselben sehr verschieden; weil sich nicht nur die Wassertheile von den Wänden der Oeffnung losreissen müssen, sondern auch dadurch, daß sich das Wasser von allen Seiten nach der Oeffnung bewegt, eine Ablenkung der Wassertheile von ihrer Bahn entsteht, welche eine **Contraction** oder Zusammenziehung des Wasserstrahls bewirkt.

Wenn ein Wasserstrahl durch eine Oeffnung in einer dünnen Wand ausfließt: so ist der Punct der größten Zusammenziehung des Strahls von der Oeffnung weiter entfernt, wenn die Druckhöhe größer wird, so wie auch mit Vergrößerung der Oeffnung bey einerley Druckhöhe und hinlänglich großem Querschnitt des zuströmenden Wassers der Abstand der größten Zusammenziehung größer wird, wie man sich leicht durch Versuche überzeugen kann.

Zusatz III. Nach den Versuchen der Herren **Venturi** und **Eytelwein** findet man dem Mittel nach den Querschnitt des zusammengezognen Wasserstrahls bey kreisförmigen Oeffnungen in einer dünnen Wand oder Metallplatte $= 0{,}64 = \frac{16}{25}$ von dem Inhalte der Ausflußöffnung. Hiernach verhält sich der Durchmesser einer kreisförmigen Oeffnung in einer dünnen Wand zum Durchmesser des zusammengezognen Strahls $= 5 : 4$.

Zusatz IV. Die verschiednen Arten der Zusammenziehung bewirken eine größere oder kleinere mittlere Geschwindig-

keit in der Ausflußöffnung, und in dem Verhältnisse eine vermehrte oder verminderte Ausflußmenge. Nur durch Versuche ist es möglich, für die verschiednen Arten des Ausflusses anzugeben, welchen Veränderungen die Wassermengen und mittlern Geschwindigkeiten unterworfen sind.

Um diese verschiednen Wassermengen leichter mit einander zu vergleichen, und den Verlust wegen der Zusammenziehung und andrer Hindernisse bey dem Ausflusse besser zu übersehen, kann man die Hypothese annehmen, daß das Wasser, wenn es vollkommen flüssig wäre und nicht zusammengezogen würde, in der Ausflußöffnung eine Geschwindigkeit erlangte, die derjenigen gleich wäre, welche ein von der Druckhöhe frey fallender Körper erhielte. Diese Geschwindigkeit sowohl, als die hieraus berechnete Wassermenge [§. 129.1)] kann man die hypothetische heißen.

Aus den von Bossut [Hydrodynamik, 2. Bd. 2. Kap.] bey prismatischen Gefäßen mit Oeffnungen in einer dünnen Wand angestellten Versuchen folgt, daß die wirkliche Ausflußmenge ein bestimmter Theil der hypothetischen ist, und wofür man als eine Mittelzahl 0,619 annehmen kann.

Da nun bey der Druckhöhe h die hypothetische Geschwindigkeit des Wassers =

$$2\sqrt{g \cdot h} = 8{,}337 \cdot \sqrt{h}$$ [§. 99.6)] Leipz. Fuß

ist: so ist daher, wenn Wasser durch eine Oeffnung in einer dünnen Wand abfließt, die wirkliche mittlere Geschwindigkeit c =

$$0{,}619 \cdot 2\sqrt{g \cdot h} = 0{,}619 \cdot 8{,}337 \cdot \sqrt{h} = 5{,}16 \cdot \sqrt{h}$$ Leipz. Fuß.

Hiernach kann man annehmen, daß die wirkliche Wassermenge 0,619 oder sehr nahe $\frac{5}{8}$ der hypothetischen ist.

Zusatz V. Läuft das Wasser nicht durch eine Oeffnung in der dünnen Wand eines Behälters, sondern durch eine cylindrische Ansatzröhre, oder durch eine Oeffnung in einer dicken Wand: so ergibt sich aus mehrern ebenfalls angestellten Versuchen [Eytelweins Mech. und Hydr. S. 106.], daß die wirkliche Wassermenge 0,8125 = $\frac{13}{16}$ von der hypothetischen beträgt. Demnach ist die mittlere Geschwindigkeit des Wassers beym Eintritt in die Röhre, oder

$$c = 0{,}8125 \cdot 8{,}337 \cdot \sqrt{h} = 6{,}77 \cdot \sqrt{h}$$ Leipz. Fuß.

Hieraus folgt, daß unter gleichen Umständen kurze Ansatzröhren $\frac{3}{16}$ mehr Wasser geben, als Oeffnungen in einer dünnen Wand [Zus. IV.].

Zusatz VI. Durch konische Röhren, welche sich gegen die Ausmündung verengen, kann die Wassermenge in Vergleichung mit andern Oeffnungen noch ansehnlich vermehrt werden.

Gibt man der konischen Ansatzröhre AEFB [Fig. 77.] die Gestalt desjenigen zusammengezognen Strahls, wie er sich bey Oeffnungen in einer dünnen Wand zeigt [§. 130. Zus. III.], so daß der Durchmesser EF der Ausmündung $\frac{4}{5}$ vom Durchmesser AB der Einmündung, und die Länge GD der Röhre so groß, oder nur etwas größer als der Halbmesser der Einmündung ist: so muß das Wasser eben so ausfließen, wie durch den Querschnitt des zusammengezognen Strahls, vorausgesetzt, daß die scharfen Kanten der konischen Röhre etwas abgerundet sind. Eine solche Röhre AEFB nennt man: **Mündung nach der Gestalt des zusammengezognen Strahls.**

Durch den kleinsten Querschnitt des zusammengezognen Strahls fließt eben so viel Wasser, als durch die dazu gehörige Oeffnung in einer dünnen Wand; daher muß die Geschwindigkeit in dem Querschnitte in demselben Verhältniß zunehmen, wie sein Flächeninhalt abnimmt. Nun ist nach Zus. III. der Querschnitt des zusammengezognen Strahls $\frac{16}{25}$ vom Querschnitt der Oeffnung, daher die Geschwindigkeit im Querschnitte der größten Zusammenziehung, oder

$$c = \frac{25}{16} \cdot 0{,}619 \cdot 2\sqrt{(g \cdot h)} = 0{,}9672 \cdot 2\sqrt{(g \cdot h)}.$$

Hat also die Röhre AEFB die erforderliche Gestalt, so ist die Geschwindigkeit des Wassers in der Ausflußöffnung EF oder

$$c = 0{,}9672 \cdot 2\sqrt{(gh)} = 8{,}063 \cdot \sqrt{h} \text{ Leipz. Fuß.}$$

Für den freyen Fall eines Körpers wäre die Geschwindigkeit $= 2\sqrt{(g \cdot h)}$; hiernach verhält sich die wirkliche Wassermenge, welche durch die Mündung AEFB bey EF ausläuft, zur hypothetischen Wassermenge für die Oeffnung EF wie $0{,}9672 : 1$ oder nahe $= 30 : 31$; und es ist wahrscheinlich, daß beyde Wassermengen gleich wären, wenn die Wassertheile nicht wegen der Adhäsion an den Wänden der Röhre verzögert würden, und wenn man der Mündung AEFB ganz genau die Gestalt des zusammengezognen Strahls geben könnte.

Zusatz VII. Um die verschiednen Werthe zusammenzustellen, welche bey der Bestimmung der mittlern Geschwindig-

keit c, für eine gegebne Druckhöhe h nach den verschiednen Arten des Ausflusses, in den vorzüglichsten Fällen der Ausübung nöthig sind, dient nach Hrn. Eytelweins und andrer Erfahrungen nachstehende Auseinandersetzung:

1) Zur Bestimmung der hypothetischen Geschwindigkeit oder für den freyen Fall der Körper von einer Höhe h erhält man nach §. 99. die erforderliche Geschwindigkeit
$c = 8{,}337 \cdot \sqrt{h}$ Leipziger Fuß $= 7{,}9 \sqrt{h}$ Rheinl. Fuß.
$h = \frac{c^2}{69{,}5} = 0{,}0143 \cdot c^2$ L. F. $= 0{,}016 \cdot c^2$ Rheinl. F.

2) Bey Mündungen von der Gestalt des zusammengezognen Strahls nach Zus. VI.
$c = 8{,}062 \cdot \sqrt{h}$ Leipziger Fuß $= 7{,}646 \cdot \sqrt{h}$ Rheinl. F.
$h = \frac{c^2}{64{,}99} = 0{,}0154 \cdot c^2$ L. F. $= 0{,}0171 \cdot c^2$ Rheinl. F.

3) Bey breiten Gerinnen, Freyschleusen mit Flügelwänden, schrägen Einbauen, spitzen Brückenpfeilern
$c = 7{,}95 \cdot \sqrt{h}$ Leipziger Fuß $= 7{,}54 \cdot \sqrt{h}$ Rheinl. Fuß.
$h = \frac{c^2}{63{,}28} = 0{,}0158 \cdot c^2$ L. F. $= 0{,}0176 \cdot c^2$ Rheinl. F.

4) Bey schmalen Gerinnen, Schutzöffnungen mit Flügelwänden, steilen Einbauen, geraden Brückenpfeilern
$c = 7{,}13 \cdot \sqrt{h}$ Leipziger Fuß $= 6{,}76 \cdot \sqrt{h}$ Rheinl. Fuß.
$h = \frac{c^2}{50{,}86} = 0{,}0197 \cdot c^2$ L. F. $= 0{,}0219 \cdot c^2$ Rheinl. F.

5) Bey kurzen Ansatzröhren, deren Länge zwey- bis viermal so groß ist als der Durchmesser der Oeffnung, oder in dicken Wänden nach Zus. V.
$c = 6{,}77 \cdot \sqrt{h}$ Leipziger Fuß $= 6{,}42 \cdot \sqrt{h}$ Rheinl. F.
$h = \frac{c^2}{45{,}83} = 0{,}0218 \cdot c^2$ L. F. $= 0{,}0242 \cdot c^2$ R. F.

6) Bey Schützöffnungen ohne Flügelwände
$c = 5{,}27 \cdot \sqrt{h}$ Leipziger Fuß $= 5 \cdot \sqrt{h}$ Rheinl. Fuß.
$h = \frac{c^2}{27{,}82} = 0{,}0359 \cdot c^2$ L. F. $= 0{,}04 \cdot c^2$ Rheinl. Fuß.

7) Bey Oeffnungen in dünnen Wänden
$c = 5{,}16 \cdot \sqrt{h}$ Leipziger Fuß $= 4{,}89 \cdot \sqrt{h}$ Rheinl. F.
$h = \frac{c^2}{26{,}62} = 0{,}0376 \cdot c^2$ L. F. $= 0{,}0417 \cdot c^2$ Rheinl. F.

8) Der kürzern Bezeichnung wegen wird in der Folge zur Bestimmung der Werthe von c und h ein allgemeines Zeichen gebraucht, und der Coefficient, mit welchem $\sqrt{h}$ multiplicirt werden muß, um c zu finden, $= \alpha$ gesetzt; so daß ganz allgemein
$c = \alpha \sqrt{h}$, also $c^2 = \alpha^2 \cdot h$, und
$h = \frac{c^2}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2} \cdot c^2$

gesetzt wird, da denn nach den besondern Umständen statt c die nöthigen Werthe gesetzt werden können.

Beyspiel I. In einem beständig voll erhaltnen Behälter befindet sich in einer dünnen Wand desselben eine Oeffnung, über welche die Druckhöhe des Wassers 12 Fuß beträgt; die lothrechte Höhe der Oeffnung ist gegen die Druckhöhe nur sehr klein; man sucht die Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser aus dieser Oeffnung fließen wird. Hier ist nach vorigem Zus. VII.7) $c = 5{,}16 \cdot \sqrt{h} = 5{,}16 \cdot \sqrt{12} = 17{,}87$ Fuß.

Beyspiel II. Aus einer kleinen Oeffnung fließt unter voriger Bedingung bey einem immer voll erhaltnen Gefäß das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 8 Fuß aus; man fragt, wie groß die dazu gehörige Wasserhöhe sey? Nach vorigem Zus. VII.7) ist $h = 0{,}0376 \cdot c^2 = 0{,}0376 \cdot 64 = 2{,}41$ Fuß.

Beyspiel III. In einem immer gleich vollen Behälter befindet sich eine Oeffnung mit einer kurzen Ansatzröhre, deren Druckhöhe 12 Fuß beträgt; mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser aus? Nach vorigem Zus. VII.5) ist $c = 6{,}77 \cdot \sqrt{h} = 6{,}77 \cdot \sqrt{12} = 23{,}45$ Fuß.

Beyspiel IV. Aus einer kurzen Ansatzröhre fließt bey einem immer voll erhaltnen Gefäß das Wasser mit einer Geschwindigkeit von 8 Fuß aus; man fragt, wie groß die dazu gehörige Wasserhöhe sey? Nach vorigem Zus. VII.5) ist $h = 0{,}0218 \cdot c^2 = 0{,}0218 \cdot 64 = 1{,}4$ Fuß.

§. 131.

Aufgabe. Für den Ausfluß des Wassers durch horizontale und kleine Seitenöffnungen eines beständig voll erhaltnen Gefäßes allgemeine Werthe zu finden.

Auflösung. Man setze, daß h die Druckhöhe, c die mittlere Geschwindigkeit in der Oeffnung, a den Flächeninhalt der Ausflußöffnung, und M die ausfließende Wassermenge in jeder Secunde bezeichne: so ist, weil $M = a \cdot c$ [§. 129. 1)]

1) die ausfließende Wassermenge $M = a \cdot \alpha \sqrt{h}$ [§. 130. Zus. VII. 8)]. Hieraus ergibt sich

2) die Druckhöhe $h = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{M^2}{a^2}$.

3) der Inhalt der Oeffnung $a = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{M}{\sqrt{h}}$.

Fließt in irgend einer Zeit von t Secunden die Wassermenge $= N$ aus, so ist $N = M \cdot t$, oder $t = \frac{N}{M}$, daher

4) die Zeit, in welcher die Wassermenge N abfließt, nämlich $t = \frac{N}{a \cdot \alpha \sqrt{h}}$.

Zusatz. Ist die Oeffnung a eine Kreisfläche, deren Durchmesser $= d$ ist: so ist $a = \frac{d^2 \pi}{4}$, also $d = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}}$. Substituirt man den Werth für a aus 3) und 4): so erhält man für

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{M}{\alpha \pi \sqrt{h}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{N}{t \alpha \pi \sqrt{h}}}.$$

Beyspiel I. Bey einem beständig voll erhaltnen Gefäße beträgt die Druckhöhe 14 Fuß, und die Größe der Oeffnung 5 Quadratzoll; man fragt, wie viel Wasser wird in 7 Secunden auslaufen, wenn sich die Oeffnung in einem dünnen Boden befindet? Hier ist nach §. 131. 4) $N = N = a \cdot \alpha \cdot t \sqrt{h}$, daher nach §. 130. Zus. VII. 7) $N = \frac{5}{144} \cdot 5{,}16 \cdot 7 \cdot \sqrt{14} = 4{,}69$ Cubikfuß.

Beyspiel II. Wenn die obigen Data dieselben blieben, die Oeffnung aber mit einer Ansatzröhre versehen oder in einer dicken Wand befindlich wäre; wie groß würde alsdann die Ausflußmenge in 7 Secunden seyn? Nach §. 130. Zus. VII. 5) ist $N = \frac{5}{144} \cdot 6{,}77 \cdot 7 \cdot \sqrt{14} = 6{,}16$ Cubikfuß.

Beyspiel III. Ein Gefäß erhält alle 5 Secunden 3 Cubikfuß Wasser Zufluß; man soll in einer Tiefe von 10 Fuß unter dem Wasserspiegel in der dünnen Wand des Gefäßes eine kreisförmige Oeffnung machen, aus welcher eben so viel Wasser ausfließt, als der Zufluß beträgt; wie groß muß der Durchmesser dieser Oeffnung seyn? Nach §. 131. Zus. ist $d = 2 \cdot \sqrt{\frac{N}{t \alpha \pi \cdot \sqrt{h}}}$; also nach §. 130. Zus. VII. 7) $d = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5 \cdot 5{,}16 \cdot 3{,}141 \cdot \sqrt{10}}}$ $= 2 \cdot 0{,}1081 = 0{,}2162$ Fuß, d. i. ungefähr $2\frac{5}{8}$ Zoll.

Beyspiel IV. Wäre die Oeffnung mit einer kurzen Ansatzröhre versehen; wie groß muß dann unter den nämlichen Be-

dingungen der Durchmesser derselben seyn? Nach §. 131. Zus. und §. 130. Zus. VII. 5) ist $d = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5 \cdot 3{,}141 \cdot 6{,}77 \cdot \sqrt{10}}} = 0{,}1889$ Fuß, oder reichlich $2\frac{1}{4}$ Zoll.

Beyspiel V. Ein Gefäß erhält in 16 Secunden 3 Cubikfuß Wasserzufluß. In der dünnen Wand des Gefäßes befindet sich eine Oeffnung von 2 Quadratzoll Flächeninhalt. Man fragt: wie hoch wird das Wasser über der Mitte der Oeffnung stehen müssen, damit eben so viel Wasser abfließen kann als zufließt? Aus §. 131. 4) folgt $h = \left(\frac{N}{t a \alpha}\right)^2$. Daher nach §. 130. Zus. VII. 7) $h = \left(\frac{3 \cdot 144}{16 \cdot 2 \cdot 5{,}16}\right)^2 = 6{,}829$ Fuß. Wäre die Oeffnung mit einer kurzen Ansatzröhre versehen, so wäre $h = \left(\frac{3 \cdot 144}{16 \cdot 2 \cdot 6{,}77}\right)^2 = 3{,}976$ Fuß.

Beyspiel VI. Durch eine 2 Quadratfuß große Oeffnung in der dünnen Wand eines Behälters sind bey einer Druckhöhe von 9 Fuß 950 Cubikfuß Wasser ausgeflossen; wie viel Zeit hat dieser Ausfluß erfordert? Nach §. 131. 4) ist $t = \frac{N}{a \cdot \alpha \cdot \sqrt{h}} = \frac{950}{2 \cdot 5{,}16 \cdot \sqrt{9}} = 30{,}68$ Secunden. Wäre an der Oeffnung eine kurze Ansatzröhre, so wäre $t = \frac{950}{2 \cdot 6{,}77 \cdot \sqrt{9}} = 23{,}38$ Secunden.

§. 132.

Aufgabe. Für den Ausfluß des Wassers durch oben offene rechtwinkliche Oeffnungen in den Seitenwänden eines Behälters allgemeine Ausdrücke zu finden, wenn man nicht annehmen kann, daß in der ganzen Oeffnung das Wasser mit gleicher Geschwindigkeit ausfließt, der Wasserspiegel aber immer auf einerley Höhe erhalten wird.

Auflösung. Bey der vorigen Aufgabe §. 131. wurde vorausgesetzt, daß bey Seitenöffnungen die Höhe derselben so gering sey, daß unter den verschiednen Geschwindigkeiten, womit das Wasser ausfließt, kein beträchtlicher Unterschied sey; wenn aber diese Geschwindigkeiten sehr von einander ab-

weichen, so wird dieserhalb eine eigne Untersuchung erfordert.

Ist das Gefäß QR [Fig. 78.] bis A mit Wasser angefüllt, und es fließt fortwährend so viel zu, daß die Höhe desselben unverändert bleibt: so kann man sich zuerst in der Verticallinie AB, welche sich in der verticalen Wand QR befindet, mehrere kleine Oeffnungen P, B ꝛc. über einander denken, und für jede derselben die dazu gehörige Geschwindigkeit des Wassers bestimmen.

Es sey AP = x, die Geschwindigkeit in P = y, so ist $y = \alpha \cdot \sqrt{x}$ [§. 130. Zus. VII. 8)]. Eben dasselbe gilt für jede andere Oeffnung B, bey der Druckhöhe AB = h; wenn die Geschwindigkeit in B = c gesetzt wird, alsdann ist $c = \alpha \cdot \sqrt{h}$. Man nehme $PM = \alpha \cdot \sqrt{x} = y$, und $BG = \alpha \cdot \sqrt{h} = c$, so verhält sich

$$AP : AB = x : h$$
$$PM : BG = \sqrt{x} : \sqrt{h},$$

$$\text{daher } AP : AB = PM^2 : BG^2.$$

Weil dieses nun für jede andere Abscisse wie AP und dazu gehörige Ordinate PM gilt: so folgt, daß die Linie AMG, welche durch die Endpuncte M, G ꝛc. der auf AB normalen Geschwindigkeiten geht, eine Parabel ist [§. 101.].

Denkt man sich nun längs der ganzen Linie AB lauter solche kleine sehr nahe an einander liegende Oeffnungen oder eine enge Spalte: so wird die Parabelfläche AGB zur Bestimmung des Inhaltes von dem Wasser, welches in einer Secunde durch die Spalte AB ausfließt, dienen. Nun ist der Inhalt der Parabelfläche $ABG = \frac{2}{3} \cdot AB \cdot BG$ [§. 101. Zus. IV.] $= \frac{2}{3} \cdot h \cdot c$, und wenn man die Breite

der Spalte oder eines schmalen Streifens $AB =$ b' setzt: so findet man die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch die Spalte oder durch den Streifen AB abfließt $= \frac{2}{3} \cdot b' \cdot hc$. Oder wenn man eine rechtwinkliche Oeffnung ABDC in der ganzen verticalen Wand QR annimmt, und die Breite $AC = BD = b$ setzt: so wird durch das Rechteck ABDC, wenn das Wasser in unveränderlicher Höhe bey AC erhalten wird und daselbst als still stehend angesehen werden kann, in jeder Secunde die Wassermenge $M = \frac{2}{3} \cdot bch = \frac{2}{3} \cdot \alpha bh \cdot \sqrt{h}$ (weil $BG = c = \alpha\sqrt{h}$) $= \frac{2}{3} \cdot \alpha b \cdot \sqrt{h^3}$ abfließen, vorausgesetzt, daß diesem Abflusse keine Hindernisse in dem Wege stehen. Aus

1) $M = \frac{2}{3} \cdot \alpha bh \cdot \sqrt{h} = \frac{2}{3} \cdot \alpha b \sqrt{h^3}$ folgt

2) $h = \sqrt[3]{\left[\frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b}\right]^2}$, und

3) $b = \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha \sqrt{h^3}}$.

Zusatz I. Befindet sich in der verticalen Wand QR bloß eine rechtwinkliche Oeffnung FEBD, deren Höhe $BE = e$, Breite $FE = BD = b$: so ist die Wassermenge M, welche durch die Oeffnung FEBD in jeder Secunde abfließt, vorausgesetzt, daß man den Wasserspiegel in Behälter als still stehend ansehen kann;

$$M = \tfrac{2}{3} \cdot AB \cdot BG \cdot DB - \tfrac{2}{3} \cdot AE \cdot EH \cdot EF$$
$$= \tfrac{2}{3} [AB \cdot BG - (AB - BE) \cdot EH] \cdot DB,$$

d. i. weil $BG = \alpha \cdot \sqrt{h}$, $EH = \alpha \cdot \sqrt{(h - e)}$,

1) $M = \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b \cdot [h \cdot \sqrt{h} - (h - e) \cdot \sqrt{(h - e)}]$
$= \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b\, [\sqrt{h^3} - \sqrt{(h - e)^3}]$,

wo α nach den Umständen aus §. 130. Zus. VII. bestimmt werden muß.

Aus $\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b\, [\sqrt{h^3} - \sqrt{(h - e)^3}] = M$ oder aus $\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b$ $[h^{\frac{3}{2}} - (h - e)^{\frac{3}{2}}] = M$ [Geom. §. 48.] folgt $h^{\frac{3}{2}} - (h - e)^{\frac{3}{2}} = \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b}$, also $h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b} = (h - e)^{\frac{3}{2}}$, und wenn man auf beyden Seiten die $\frac{2}{3}$ Potenz nimmt $\left(h^{\frac{3}{2}} - \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b}\right)^{\frac{2}{3}} =$ $(h - e)^{\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}} = h - e$.

Folglich die Höhe der Oeffnung

$$2)\ e = h - \sqrt[3]{\left[h \cdot \sqrt{h} - \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b}\right]^2}.$$

Die Breite der Oeffnung ist

$$3)\ b = \frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha\,[\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-e)^3}]}.$$

Zusatz II. Setzt man die hier eingeführte Bezeichnung statt der Werthe in §. 131., so erhält man einen zweyten Ausdruck für die Wassermenge bey einer rechtwinklichen Oeffnung

$$1)\ M = \alpha \cdot be \cdot \sqrt{(h - \tfrac{1}{2} e)},$$

und daraus die Breite der Oeffnung

$$2)\ b = \frac{M}{\alpha \cdot e \cdot \sqrt{(h - \frac{1}{2} e)}},$$

und der Wasserstand

$$3)\ h = \left(\frac{M}{\alpha b e}\right)^2 + \tfrac{1}{2} e.$$

Zusatz III. Wäre in §. 132. Zus. I. die Oeffnung ein Quadrat, also $b = e$, so wäre $M = \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b\,[\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-b)^3}]$. Ist hingegen die Oeffnung eine Kreisfläche, deren Durchmesser $= d = b$ ist: so darf man nur die durch das Quadrat des Durchmessers ausfließende Wassermenge mit $\frac{\pi}{4}$ multipliciren, um die Wassermenge zu erhalten, welche durch die Kreisöffnung ausfließt. Es ist daher für diesen Fall $M = \frac{2\alpha\pi d}{3 \cdot 4}$ $[\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-d)^3}] = \frac{\alpha\pi d}{6} \cdot [\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-d)^3}]$.

Wollte man aus der vorstehenden Gleichung einen Werth für den Durchmesser d entwickeln, so würde man eine Gleichung vom fünften Grade erhalten, die sehr schwierig aufzulösen wäre. Um dieses zu vermeiden, verfahre man so: Aus letzterer Gleichung folgt $\frac{6 \cdot M}{\alpha\pi} = d\,[\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-d)^3}]$. Bestimmt man nun nach §. 131. Zus. den ungefähren Werth für d, und setzt diesen in die vorstehende Gleichung: so wird die Berechnung zeigen, ob der gefundne Ausdruck größer oder kleiner als $\frac{6M}{\alpha\pi}$ ist, wonach dann der Werth von d verhältnißmäßig verändert werden kann.

Beyspiel I. An einem See, dessen Oberfläche als still stehend angenommen werden kann, ist eine oben offne rechtwinkliche Ausflußöffnung von 6 Fuß Breite angebracht, der Wasserstand beträgt 4 Fuß; wie viel Wasser fließt bey unverändert bleibendem Wasserstand in der Secunde aus? Nach

§. 132. 1) und §. 130. Zus. VII. 6) ist $M = \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b\sqrt{h^3} = \frac{2}{3} \cdot 5{,}27 \cdot 6 \cdot \sqrt{64} = 168{,}64$ Cubikfuß.

Beyspiel II. Ein See hat in jeder Secunde 100 Cubikfuß Wasserzufluß; wie tief muß der unterste Rand einer 10 Fuß breiten Oeffnung angelegt werden, damit die zufließende Wassermenge stets in der Secunde auch abfließt? Nach §. 132. 2) und §. 130. Zus. VII. 6) ist $h = \sqrt[3]{\left[\frac{M}{\frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b}\right]^2} = \sqrt[3]{\left[\frac{3 \cdot 100}{2 \cdot 5{,}27 \cdot 10}\right]^2} = 2{,}009$ Fuß.

Beyspiel III. Wie breit muß die Oeffnung an einem See angelegt werden, wenn der unveränderte Wasserstand 9 Fuß beträgt, und in jeder Secunde 300 Cubikfuß Wasser abfließen sollen? Nach §. 132. 3) und §. 130. Zus. VII. 6) ist $b = \frac{3 \cdot M}{2\alpha \cdot \sqrt{h^3}} = \frac{900}{10{,}54 \cdot \sqrt{729}} = 3{,}16$ Fuß.

Beyspiel IV. An einem See hat man eine rechtwinkliche Oeffnung von 4 Fuß Breite angebracht, wodurch der Wasserstand des Sees stets zu 9 Fuß erhalten wird. Man will, ohne den untern Rand der Oeffnung tiefer zu legen, ohne also die Höhe der Oeffnung zu verändern, und bey sich stets gleich bleibendem Zufluß, den Wasserstand auf 4 Fuß bringen; wie breit wird die Oeffnung werden müssen? Man nenne die gesuchte Breite $= x$, die anfängliche Höhe des Wasserstandes $= h$, und die nachherige Höhe $= h'$: so muß nach §. 132. 1)

$$M = \tfrac{2}{3} \cdot \alpha \cdot x\sqrt{h'^3} = \tfrac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b\sqrt{h^3}$$

$$\text{oder } x = \frac{b \cdot \sqrt{h^3}}{\sqrt{h'^3}} = b \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{h'}\right)^3}$$

$$\text{also } x = 4 \cdot \sqrt{\left(\tfrac{9}{4}\right)^3} = 13{,}5 \text{ Fuß seyn.}$$

Beyspiel V. In der lothrechten Wand eines Behälters findet sich eine rechtwinkliche Oeffnung, deren Breite 3 Fuß, Höhe 2 Fuß und die Wasserstandshöhe 6 Fuß beträgt; wie viel Wasser wird in jeder Secunde auslaufen? Nach §. 132. Zus. I. 1) und §. 130. Zus. VII. 6) ist $M = \frac{2}{3} \cdot \alpha \cdot b\,[\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-e)^3}] = \frac{2}{3} \cdot 5{,}27 \cdot 3\,[\sqrt{6^3} - \sqrt{(6-2)^3}] = 2 \cdot 5{,}27\,[\sqrt{216} - \sqrt{64}] = 70{,}51$ Cubikfuß.

Beyspiel VI. An einem Behälter kann die rechtwinkliche Ausflußöffnung mittels eines Schutzbretes verschlossen werden. Die Höhe des Wasserstandes beträgt 5 Fuß, und die Breite der Oeffnung 2 Fuß; man will wissen, wie hoch das Schutzbret aufgezogen werden müsse, damit bey dem gegebnen Wasserstan-

de die zufließende Wassermenge von 20 Cubikfuß in jeder Secunde ausfließen könne? Nach §. 132. Zus. I. 2) und §. 130. Zus. VII. 6) ist $e = h - \sqrt[3]{\left[\sqrt{h^3} - \frac{3M}{2\alpha b}\right]^2} = 5 - \sqrt[3]{\left[\sqrt{125} - \frac{60}{2 \cdot 5{,}27 \cdot 2}\right]^2} = 5 - 4{,}109 = 0{,}891$ Fuß.

Beyspiel VII. Ein Behälter hat in jeder Secunde 12 Cubikfuß Wasserzufluß. Man will zu dem Ausfluß desselben bey einem Wasserstand von 4 Fuß eine 1 Fuß hohe rechtwinkliche Oeffnung anlegen; wie breit muß dieselbe gemacht werden, damit der gegebne Wasserstand erhalten wird? Nach §. 132. Zus. I. 3) ist $b = \frac{3M}{2\alpha[\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-e)^3}]} = \frac{3 \cdot 12}{2 \cdot 5{,}27\,(\sqrt{64} - \sqrt{27})} = 1{,}237$ Fuß.

Beyspiel VIII. In einem Behälter, welcher in jeder Secunde 25 Cubikfuß Wasserzufluß hat, soll eine 3 Fuß breite und $1\frac{1}{2}$ Fuß hohe Ausflußöffnung gemacht werden; wie hoch wird das Wasser über der untern Breite der Oeffnung stehen müssen, damit die abfließende Wassermenge dem gegebnen Zuflusse gleich sey? Nach §. 132. Zus. II 3) ist $h = \left(\frac{M}{\alpha b e}\right)^2 + \frac{1}{2}e = \left(\frac{25}{5{,}27 \cdot 3 \cdot 1{,}5}\right)^2 + 0{,}75 = 1{,}86$ Fuß.

Beyspiel IX. In der verticalen Wand eines Behälters befindet sich eine kreisförmige Oeffnung, deren Durchmesser 1 Fuß groß ist; die Höhe des Wasserstandes beträgt 3 Fuß; wie viel Wasser wird in jeder Secunde ausfließen? Nach §. 132. Zus. III. ist $M = \frac{\alpha\pi d}{6} \cdot [\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-d)^3}] = \frac{5{,}27 \cdot 3{,}141 \cdot 1}{6} \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{8}) = 6{,}534$ Cubikfuß.

Beyspiel X. Ein Wasserbehälter hat in jeder Secunde 48 Cubikfuß Wasserzufluß. Man soll in der verticalen Wand desselben eine kreisförmige Oeffnung so anlegen, daß der niedrigste Punct der Oeffnung 4 Fuß unter dem Wasserspiegel liege; wie groß muß der Durchmesser des Kreises seyn, damit eben so viel Wasser ab- als zufließt? Nach §. 132. Zus. III. ist $\frac{6M}{\alpha\pi} = d[\sqrt{h^3} - \sqrt{(h-d)^3}]$, oder hier $\frac{6 \cdot 48}{5{,}27 \cdot 3{,}141} = d[\sqrt{64} - \sqrt{(4-d)^3}]$, oder $17{,}39 = d[8 - \sqrt{(4-d)^3}]$. Nach §. 131. Zus. erhält man für $d = 2\sqrt{\frac{M}{\alpha\pi\sqrt{h}}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{48}{5{,}27 \cdot 3{,}141 \cdot 2}} = 2{,}408$. Man setze nun $d = 2{,}5$, so müßte seyn $17{,}39 = 2{,}5 \cdot [8 - \sqrt{(1{,}5)^3}]$. Man erhält aber $= 2{,}5 \cdot [8 - \sqrt{(1{,}5)^3}] = 15{,}4075$, also zu wenig. Für $d = 2{,}6$ erhält

man $2,6 \cdot [8 - \sqrt{(4 - 2,6)^3}] = 16,4944$, folglich noch zu wenig; und für $d = 2,7$ erhält man $2,7 \cdot [8 - \sqrt{(4 - 2,7)^3}] = 19,5986$, also zu viel. Man kann daher den gesuchten Durchmesser etwa $d = 2,65$ Fuß setzen.

§. 133.

Aufgabe. Die Zeit des Ausflusses des Wassers aus prismatischen Behältern, die keinen Zufluß erhalten, allgemein anzugeben.

Auflösung. Ein prismatisches Gefäß ABCD [Fig. 79.] sey mit Wasser angefüllt, welches durch eine Oeffnung im Boden abfließt. Leert sich dieses Gefäß aus, ohne Zufluß zu erhalten: so wird anfänglich dem ausströmenden Wasser die Geschwindigkeitshöhe AB, wenn der Spiegel bis P gesunken ist, die Geschwindigkeitshöhe PB &c. zugehören. Auf AB normal setze man die Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser ausfließt dergestalt, daß die zum Wasserstande

AB gehörige Geschwindigkeit = AE,
PB " " = PQ,
P'B " " = P'Q' &c.

angenommen wird: so ist EQQ'B eine Parabel, weil sich die Abscissen BP, BP' ꝛc. eben so, wie die Quadrate der Ordinaten PQ, P'Q' &c. verhalten [§. 130.]. Es nehmen daher die Geschwindigkeiten des Wassers bey einem Gefäße, welches sich ausleert, in eben dem Verhältniß ab, wie die Geschwindigkeiten eines steigenden Körpers. Weil nun in derjenigen Zeit, darin ein steigender Körper mit einer bestimmten Geschwindigkeit seine größte Höhe erreicht hat oder bis seine Geschwindigkeit = 0 wird, ein andrer Körper, der fortwährend die anfängliche Geschwindigkeit behält, einen doppelt so großen

Raum durchläuft [§. 100. und §. 96. Zus. II.]: so wird daher aus ähnlichen Gründen in der Zeit, in welcher sich das prismatische Gefäß ausleert, bey unveränderlicher anfänglichen Geschwindigkeit, oder bey voll erhaltnem Gefäße, doppelt so viel Wasser auslaufen.

Der Inhalt vom horizontalen Querschnitt des Gefäßes sey $= A$, der Inhalt der Oeffnung $= a$, und die anfängliche Druckhöhe $AB = h$: so ist der Inhalt des Wassers im Gefäße $= Ah$. Ist nun t die Zeit, in welcher sich das prismatische Gefäß ausleert: so muß in dieser Zeit bey einem stets voll erhaltnen Gefäße die Wassermenge $2Ah$ auslaufen. Dieß gibt $2Ah = at\alpha\sqrt{h}$ [§. 131.], daher die Zeit der Ausleerung

$$t = \frac{2Ah}{a\alpha\sqrt{h}} = \frac{2A \cdot \sqrt{h}}{a\alpha}.$$

Zusatz I. Wäre das Wasser im Gefäße in der Zeit t' um die Tiefe x gesunken, so erhält man die Zeit $t - t'$, in welcher das übrige Wasser von der Höhe $h - x$ ausläuft, wie vorher $t - t' = \frac{2A \cdot \sqrt{(h-x)}}{a\alpha}$, oder $t' = t - \frac{2A \cdot \sqrt{(h-x)}}{\alpha a} = \frac{2A \cdot \sqrt{h}}{a\alpha} - \frac{2A \cdot \sqrt{(h-x)}}{a\alpha}$; daher die Zeit, in welcher der Wasserspiegel um die Tiefe x sinkt,

$$1)\ t' = \frac{2A}{a\alpha} \cdot [\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}].$$

Aus 1) erhält man $\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)} = \frac{\alpha a t'}{2A}$, oder $\sqrt{h} - \frac{\alpha a t'}{2A} = \sqrt{(h-x)}$, oder $h - \frac{\alpha a t' \cdot \sqrt{h}}{A} + \frac{\alpha^2}{4}\left(\frac{at'}{A}\right)^2 = h - x$, also $x = \frac{\alpha a t' \cdot \sqrt{h}}{A} - \frac{\alpha^2}{4} \cdot \left(\frac{at'}{A}\right)^2$; daher die Tiefe, um welche das Wasser in der Zeit t' fällt, oder

$$2)\ x = \frac{\alpha a t'}{A} \cdot \left(\sqrt{h} - \frac{\alpha a t'}{4A}\right).$$

Zusatz II. Sind zwey Gefäße ABCD und CDEF [Fig. 80.] mittels einer Verbindungsöffnung D zusammengesetzt, befindet sich im zweyten Gefäße keine Ausflußöffnung, und wird das Wasser im ersten Gefäße unveränderlich auf der Höhe CD erhalten: so muß sich das zweyte Gefäß CF nach und nach an-

füllen. Die Zeit der Anfüllung kann mit Hilfe des vorigen Zusatzes leicht bestimmt werden; denn auf eine ähnliche Art wie die Gesetze beym Steigen der Körper mit dem freyen Falle derselben übereinkommen, eben so muß auch bey unverändertem Wasserstande eines Gefäßes zur Anfüllung eines zweyten mittels einer Verbindungsöffnung eben so viel Zeit erfordert werden, als wenn sich das zweyte Gefäß durch eine Oeffnung, die der Verbindungsöffnung gleich ist, frey ausleerte, weil die Druckhöhe der Verbindungsöffnung eben so, wie bey dem Ausleeren eines Gefäßes abnimmt. Es können daher die Ausdrücke des vorigen Zusatzes hier angewandt werden, nur daß das, was daselbst für das Sinken gilt, hier vom Steigen verstanden werden muß. Ist daher

A der Inhalt vom horizontalen Querschnitt des Gefäßes CF,
a der Inhalt der Verbindungsöffnung bey D,
h die beständige Druckhöhe CD im Gefäße AD:

so findet man die Zeit t, in welcher das zweyte Gefäß auf die ganze Höhe CD = h angefüllt wird, oder $t = \frac{2A \cdot \sqrt{h}}{\alpha a}$.

Die Zeit t', in welcher das Wasser auf die Höhe DG = h' steigt, ist alsdann $t' = \frac{2A}{\alpha a} \cdot [\sqrt{h} - \sqrt{(h - h')}]$, und die Zeit t'', in der das Wasser auf irgend eine Höhe GK = y steigt, $t'' = \frac{2A}{\alpha a} \cdot [\sqrt{(h - h')} - \sqrt{(h - h' - y)}]$.

Mittels dieser Ausdrücke lässt sich die Zeit, welche zum Anfüllen und Ablassen der Schleusenkammern erfordert wird, bestimmen.

Zusatz III. Wenn sich an einem prismatischen Behälter eine oben offene rechtwinkliche Oeffnung in einer verticalen Wand befindet: so lässt sich die Zeit, in welcher der Wasserspiegel um eine bestimmte Tiefe sinkt, nach §. 132. und mittels der höhern Analysis finden. Bezeichnet

A den horizontalen Querschnitt des Behälters,
h die Höhe des Wasserstandes,
b die Breite der Oeffnung,
x die Tiefe, um welche der Wasserspiegel sinkt,
t' die Zeit, worin der Wasserspiegel um die Tiefe x gesunken ist:

so findet man $t' = \frac{3A\,[h \cdot \sqrt{(h - x)} - (h - x) \cdot \sqrt{h}]}{\alpha b\,[h\,(h - x)]}$.

Anmerkung. Leert sich ein Gefäß ganz aus, so entsteht, wenn der Wasserspiegel der Ausflußöffnung nahe kommt,

oberhalb derselben eine Art von Trichter oder Strudel in dem Wasser, welchen die Luft ausfüllt, wodurch der Ausfluß zum Theil verhindert wird. Will man dieß vermeiden, so darf man nur ein sehr dünnes Bretchen über diese trichterförmige Oeffnung des Wasserspiegels legen.

Beyspiel I. In welcher Zeit wird sich ein 9 Fuß hoch angefülltes prismatisches Gefäß leeren, dessen horizontaler Querschnitt 8 Quadratfuß, und dessen Ausflußöffnung im Boden 3 Quadratzoll beträgt? Nach §. 133. und §. 130. Zus. VII. 7) ist $t = \frac{2A \cdot \sqrt{h}}{a\alpha} = \frac{2 \cdot 144 \cdot 8 \cdot \sqrt{9}}{3 \cdot 5,16} = 446,5$ Secunden = 7 Min. $26\frac{1}{2}$ Secunden.

Beyspiel II. Wie groß muß man die Ausflußöffnung eines 6 Fuß hoch angefüllten, 400 Quadratfuß Querschnittsfläche haltenden Behälters machen, damit er sich in 6 Stunden ganz ausleere? Nach §. 133. ist $a = \frac{2A \cdot \sqrt{h}}{\alpha \cdot t} = \frac{2 \cdot 400 \cdot \sqrt{6}}{5,16 \cdot 21600} = 0,0175$ Quadratfuß = 2,5 Quadratzoll.

Beyspiel III. Ein prismatisches Gefäß ist 8 Fuß hoch mit Wasser angefüllt; sein Querschnitt beträgt 6 Quadratfuß, die Fläche der Ausflußöffnung aber 4 Quadratzolle; man fragt, in wie viel Zeit der Wasserspiegel um 5 Fuß tief sinken werde, wenn das Gefäß keinen Zufluß erhält? Nach §. 133. Zus. I. 1) ist $t' = \frac{2A}{a \cdot \alpha} \cdot [\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}] = \frac{2 \cdot 144 \cdot 6}{5,16 \cdot 4} \cdot [\sqrt{8} - \sqrt{3}]$ = 92 Secunden = 1 Minute 32 Secunden.

Beyspiel IV. In einem prismatischen Wasserbehälter, dessen Oberfläche 300 Quadratfuß beträgt, befindet sich 10 Fuß unter dem Wasserspiegel eine Oeffnung von 8 Quadratzollen; um wie viel Fuß wird der Wasserspiegel sinken, und wie viel Wasser wird abfließen, wenn eine halbe Stunde lang Wasser aus der Oeffnung fließt, ohne daß der Behälter Zufluß erhält? Nach §. 133. Zus. I. 2) ist die Tiefe x, um welche das Wasser in einer halben Stunde fällt $= \frac{\alpha a t'}{A} \cdot \left(\sqrt{h} - \frac{\alpha a t'}{4A}\right) = \frac{5,16 \cdot 8 \cdot 1800}{144 \cdot 300} \cdot \left(\sqrt{10} - \frac{5,16 \cdot 8 \cdot 1800}{4 \cdot 144 \cdot 300}\right) = 4,69$ Fuß. Daher die Wassermenge, welche in dieser Zeit ausfließt = Ax = 300 · 4,69 = 1407 Cubikfuß.

Beyspiel V. Wie groß muß man die Ausflußöffnung eines 25 Fuß hoch angefüllten und 400 Quadratfuß an Flächeninhalt habenden Behälters machen, damit er, ohne Zufluß zu erhal-

ten, sich in einer Stunde um 16 Fuß senke? Aus §. 133. Zus. I. 1) folgt $a = \frac{2A}{\alpha \cdot t'} \cdot [\sqrt{h} - \sqrt{(h-x)}] = \frac{2 \cdot 400}{5,16 \cdot 3600} \cdot [\sqrt{25} - \sqrt{(25-16)}] = 0,086$ Quadratfuß $= 12$ Quadratzolle.

Beyspiel VI. Ein prismatischer Behälter, welcher keinen Zufluß erhält, hat 12000 Quadratfuß Oberfläche. In einer der Seitenwände desselben befindet sich eine oben offne, 2 Fuß breite rechtwinkliche Oeffnung, deren untrer Rand oder Fachbaum 4 Fuß tief unter dem Wasserspiegel liegt; man fragt, in wie viel Zeit wird sich der Wasserspiegel 3 Fuß tief senken? Nach §. 133. Zus. III. und mittels §. 130. Zus. VII. 6) ist $t' = \frac{3A[h \cdot \sqrt{(h-x)} - (h-x) \cdot \sqrt{h}]}{\alpha b [h \cdot (h-x)]} = \frac{3 \cdot 12000 \cdot [4 \cdot \sqrt{(4-3)} - (4-3) \cdot \sqrt{4}]}{5,27 \cdot 2 \cdot [4 \cdot (4-3)]}$ $= 1707$ Secunden $= 28$ Minuten 21 Secunden.

Beyspiel VII. In wie viel Zeit wird der Raum ARMBH [Fig. 81.] einer Schleusenkammer aus dem Oberwasser NAR durch die im Oberthore AR befindliche Oeffnung DE mit Wasser angefüllt werden, wenn der Wasserspiegel MS des Unterwassers unter dem Spiegel NA des Oberwassers um $=$ BH $= 10$ Fuß liegt, die Höhe der Oeffnung DE $= 4$ Fuß, ihre Breite $2\frac{1}{2}$ Fuß, also ihr Inhalt $= 10$ Quadratfuß, und die Tiefe ihres Punctes des mittlern Drucks [§. 129. 130. Zus. I.] unterm Oberwasser oder AF $=$ GH $= 5$ Fuß beträgt?

Zieht man durch den Punct F, als den Punct des mittlern Drucks auf der Oeffnung DE die Horizontale FG, so kann man sich vorstellen, daß der unterste Raum FRMBG eben so angefüllt werde, als wenn das Wasser durch die Oeffnung DE frey ausströmte [§. 131.]. Die Zeit, in welcher der oberste Raum AFGH angefüllt wird, kann nach §. 133. Zus. II. leicht bestimmt werden, daher lässt sich, wenn die zur Anfüllung beyder Räume erforderlichen Zeiten zusammengenommen werden, die gesuchte Zeit leicht finden. Es betrage der Raum FRMBG $= 24000$ Cubikfuß, so ist mittels §. 130. Zus. VII. 6) und §. 131. 4), weil BG $=$ BH $-$ GH $= 10 - 5 = 5$ Fuß, die Zeit zur Anfüllung des untern Raums FRBG $= \frac{24000}{10 \cdot 5,27 \cdot \sqrt{5}}$ $= 204$ Secunden.

Zur Bestimmung der Zeit, in welcher der obere Raum AFGH angefüllt wird, ist nach §. 133. Zus. II., wenn die Länge AH der Schleusenkammer $= 200$ Fuß, und ihre Breite $= 24$ Fuß, also ihr Querschnitt $= 4800$ Quadratfuß beträgt, die

zur Anfüllung des obern Raums nöthige Zeit $= \frac{2 \cdot 4800 \cdot \sqrt{5}}{5,27 \cdot 10}$ $= 407$ Secunden.

Beyde Zeiten, $204 + 407$ Secunden zusammengenommen, geben die zur Anfüllung der Schleusenkammer erforderliche Zeit $= 611$ Secunden $= 10$ Minuten 11 Secunden.

Beyspiel VIII. Die Schleusenkammer ARKH [Fig. 81.] ist bis AH mit Wasser gefüllt; das Unterwasser BS steht 10 Fuß unter dem Wasserspiegel AH. In wie viel Zeit wird sich das im Raume BRAH enthaltne Wasser durch die $2\frac{1}{2}$ Fuß weite und 5 Fuß hohe oder 12,5 Quadratfuß haltende Schutzöffnung LP im Unterthore HK in das Unterwasser ausleeren, wenn vorausgesetzt wird, daß der Stand des Unterwassers unverändert bleibt?

Wenn Q der Punct des mittlern Drucks ist, so muß die Druckhöhe des ausfließenden Wassers allemal von der Oberfläche des Unterwassers bis zum Wasserspiegel in der Schleusenkammer gerechnet werden. Da man nun für diese Ausleerung die Schleusenkammer als prismatisch ansehen kann, so ist nach §. 133. die Zeit, in welcher sich der Kammerraum ARBH ausleert $= \frac{2 \cdot 4800 \cdot \sqrt{10}}{12,5 \cdot 5,27} = 461$ Secunden $= 7$ Minuten 41 Secunden.

§. 134.

Aufgabe. Für den Ausfluß des Wassers aus Behältern, welche durch Scheidewände abgetheilt sind, allgemeine Ausdrücke zu bestimmen, vorausgesetzt, daß der Wasserstand unverändert bleibe.

Auflösung. Wenn z. B. drey mit Wasser gefüllte Gefäße dergestalt zusammengesetzt sind, daß mit dem offnen Gefäße BCED [Fig. 82. 83.] die beyden verschlossenen Gefäße DEGF, FGKH mittels verticaler oder horizontaler Scheidewände DE, FG zusammenhängen, und man setzt voraus, daß der Wasserspiegel BC unverändert bleibe, und eben so viel Wasser also daselbst zufließe, als durch die Ausflußöffnung in der Wand HK abläuft: so

sey für das Gefäß GH, in welchem sich die Ausflußöffnung befindet,

A der Inhalt des Querschnitts HK,

C die Geschwindigkeit des Wassers in diesem Querschnitte,

a der Inhalt der Ausflußöffnung, und

c die Geschwindigkeit des Wassers in dieser Oeffnung.

Für die Gefäße DEGF, BCED haben die Größen A', A'', C', C'', a', a'', c', c'' eine ähnliche Bedeutung. Ist nun ferner h die gesammte Druckhöhe, oder die verticale Entfernung des Wasserspiegels BC von dem Puncte des mittlern Drucks der Ausflußöffnung a: so erhält man die Geschwindigkeit $c' = \frac{ac}{a'}$; $c'' = \frac{ac}{a''}$.

Wird nun die Weite des Gefäßes wenigstens so groß, vorausgesetzt, daß die Hindernisse, welche das Wasser bey der Fortbewegung an den Wänden der Gefäße wegen Klebrigkeit oder Adhäsion und andrer Hindernisse der Bewegung leidet, bey Seite gesetzt werden können: so ist nach §. 131.2) die zur Geschwindigkeit c'' erforderliche Höhe $= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{ac}{a''}\right)^2$.

Die zur Geschwindigkeit c' erforderliche Höhe wäre $\frac{1}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{ac}{a'}\right)^2$; weil aber das Wasser im Gefäße DG schon mit der Geschwindigkeit $C' = \frac{ac}{A'}$, zu welcher die Höhe $\frac{C'^2}{4g}$ [§. 99.3)] gehört, vor der Oeffnung a' anlangt, so ist die zur Geschwindigkeit c' erforderliche Höhe $= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left(\frac{ac}{a'}\right)^2 - \frac{1}{4g} \cdot \left(\frac{ac}{A'}\right)^2$.

Auf ähnliche Art findet man die zur Ausflußgeschwindigkeit c erforderliche Höhe $= \frac{1}{\alpha^2} \cdot c^2 - \frac{1}{4g} \cdot \left(\frac{ac}{A}\right)^2$.

Sämmtliche erforderliche Geschwindigkeitshöhen müssen daher der vorhandnen Druckhöhe h gleich seyn, und es ist daher

$$h = \frac{1}{\alpha^2}\left[c^2 + \left(\frac{ac}{a'}\right)^2 + \left(\frac{ac}{a''}\right)^2\right] - \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{ac}{A}\right)^2 + \left(\frac{ac}{A'}\right)^2\right] \text{ oder}$$

$$= \frac{c^2}{\alpha^2}\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]$$

Setzt man die in jeder Secunde ausfließende Wassermenge $= M$, so ist $ac = M$: oder $\frac{M^2}{a^2} = c^2$; daher die **Druckhöhe für drey Gefäße**

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 \cdot a^2}\cdot\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\left(\frac{a}{A}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A'}\right)^2\right],$$

und hieraus die **Wassermenge**

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A'}\right)^2\right]}}.$$

Zusatz I. Für zwey Gefäße erhält man die Druckhöhe

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\cdot\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A}\right)^2\right],$$

und die Wassermenge

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A}\right)^2\right]}}.$$

Zusatz II. Wenn die Gefäße gleich weit, also $A = A'$ ist, so erhält man bey drey Gefäßen

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\cdot\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{2\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A}\right)^2\right].$$

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2 - \frac{2\alpha^2}{4g}\cdot\left(\frac{a}{A}\right)^2\right]}}.$$

Zusatz III. Bey sehr weiten Gefäßen, wo $\frac{a}{A} = \frac{a}{A'} = 0$ gesetzt werden kann, ist für drey Gefäße

$$h = \frac{M^2}{\alpha^2 a^2}\cdot\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right], \text{ und}$$

$$M = \frac{\alpha a \sqrt{h}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right]}}.$$

Zweytes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Flußbetten.

§. 135.

Erklärung. Unter einem Flußbette versteht man die Oberfläche des ausgehöhlten Weges, worin das Wasser eines Stroms, Flusses, Baches, Canals ꝛc. läuft oder fließt.

Unter Strom versteht man jedes schiffbare fließende Gewässer, welches sich unmittelbar in das Meer oder in die See ergießt, z. B. der Elbstrom; unter Fluß hingegen ein schiffbares fließendes Gewässer, welches seinen Ausfluß in einen Strom oder andern Fluß hat, z. B. der Muldenfluß oder die Mulde.

Ein Bach ist ein kleines fließendes Wasser, welches nicht beschifft werden kann.

Canal heißt jeder künstliche Fluß, der zur Vereinigung zweyer Gewässer dient; Graben, wenn nur Zu- oder Abfluß, aber nicht Schifffahrt bezweckt wird.

Ein von hölzernen Wänden eingeschloßner Canal heißt ein Gerinne.

§. 136.

Erklärung. Nimmt man auf der Oberfläche des Wassers irgendwo einen Punct, und in irgend einer Entfernung nach dem Ausflusse zu einen zweyten an, denkt sich durch den ersten Punct eine Horizontalebene gelegt: so nennt man die Entfernung des zweyten oder untersten Punctes von der Horizontalebene das Gefälle des Flusses auf diese angenommene Länge.

Dividirt man das Gefälle durch die dazu gehörige Stromlänge, so pflegt man auch diesen Quotienten den Abhang zu nennen.

Denkt man sich auf die Richtung eines Stroms eine senkrechte Ebene, welche das Bette desselben winkelrecht schneidet: so nennt man diesen Schnitt den Querschnitt des Stroms, und die Zeichnung davon ein Quer- oder Breitenprofil. Der Umfang des Querprofils, so weit er mit dem Bette zusammenfällt, heißt die **Wand** des Querschnittes.

Ein verticaler Durchschnitt längs der Richtung des Stroms vom Wasserspiegel bis aufs Grundbette gibt das Längenprofil des Stroms.

§. 137.

Erklärung. Unter mittlerer Geschwindigkeit des Wassers in einem Querprofile versteht man diejenige, mit welcher dasselbe durch alle Theile des Profils fließen müßte, damit eine eben so große Wassermenge durchläuft, als wenn das Wasser mit verschiednen Geschwindigkeiten abfließt.

§. 138.

Erfahrung. Ist in einem Flusse die Oberfläche des Wassers horizontal, der Boden mag eine Gestalt haben, welche er will: so wird, wenn außer dem Gewichte des Wassers keine andern Ursachen hinzukommen, keine Bewegung desselben entstehen können, weil alle Wassertheilchen auf der Oberfläche, und in jeder Tiefe, gleich stark nach allen Seiten pressen. Ist hingegen der Wasserspiegel gegen den Horizont geneigt, so erhalten sämmtliche Wassertheile im Flußbette nach derjenigen Richtung

hin, wohin die Oberfläche ihren Abhang hat, ihre Bewegung.

Stellt man sich nun vor, daß das Wasser im Bette wie auf einer geneigten Ebene sich herunterbewegt: so müßte dasselbe, wenn sein Lauf durch nichts gehindert wird, eine beschleunigte Bewegung annehmen, und immer schneller fließen, je länger die Bewegung dauert [§. 112.], auch selbst wenn die schiefe Ebene nach und nach weniger Neigung erhalten sollte. Ob nun gleich alle Flüsse von ihrer Quelle bis zum Meere Gefälle haben, so findet man doch größtentheils, daß ihre Geschwindigkeit nach dem Meere hin abnimmt; es muß daher ein Widerstand vorhanden seyn, welcher die Bewegung des Wassers aufhält, und dadurch die Geschwindigkeit desselben vermindert. Buat hat über die Geschwindigkeit des Wassers in Flüssen die mehrsten Versuche angestellt, und führt deßhalb folgende Sätze auf.

§. 139.

Grundsätze. Befindet sich fließendes Wasser in einem geraden Flußbette, wo alle Querprofile gleich sind: so muß bey einer gleichförmigen Bewegung des Wassers

1) die beschleunigende Kraft, welche aus dem Abhange der Oberfläche des Wassers entspringt, dem Widerstande im Flußbette gleich seyn. Es wird
2) in demselben Verhältniß mehr Kraft zur Bewegung des Wassers erfordert, wie die Profilwände sich vergrößern.
3) Die Widerstände sind den Quadraten der Geschwindigkeiten des Wassers proportional.

4) Die Widerstände, welche die Bewegung der einzelnen Wassertheile verzögern, verhalten sich umgekehrt wie die Querschnitte.

Hieraus folgt, daß in zwey verschiednen Flußbetten, in welchen die Bewegung des Wassers gleichförmig ist, sich also

5) die Widerstände, welche die Bewegung der Wassertheile verzögern, eben so verhalten, wie die Profilwände und Quadrate der Geschwindigkeiten, und umgekehrt wie die Inhalte der Querschnitte.

§. 140.

Aufgabe. Die mittlere Geschwindigkeit eines Stroms durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Nennt man bey zwey Flüssen, in denen die Bewegung gleichförmig geworden ist, wo alle Querschnitte einander gleich sind, und bey welchen man annehmen kann, daß sich das Wasser durch jeden Querschnitt auf einerley Art bewege,

C, c ihre mittlern Geschwindigkeiten,
S, s die Inhalte ihrer Querschnitte,
P, p ihre Wände oder die Umfänge ihrer Querprofile,
A, α ihre Gefälle, und
L, λ die dazu gehörigen Längen, auf welche die Bewegung der einzelnen Wasserfäden gleichförmig erfolgt:

so ist bekannt, (weil zur Ueberwältigung des Widerstandes in einem Flußbette keine andere beständige Kraft als die Schwere vorhanden ist, welche jeden Körper, dessen Richtung gegen den Horizont geneigt ist, beschleuniget,) daß sich die von der Schwere bewirkten Beschleunigungen zweyer Massen auf einer

schiefen Ebene oder die beschleunigenden Kräfte wie die Höhen der schiefen Ebenen dividirt durch ihre Längen verhalten [§. 112. Zus. I.].

Nun bezeichnen in dem vorliegenden Falle A, α die Höhen, und L, λ die Längen der schiefen Ebenen, daher verhalten sich die beschleunigenden Kräfte wie $\frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}$. Aber die beschleunigenden Kräfte sind den Widerständen in den Betten, welche hier durch W, w bezeichnet werden, gleich; daher muß sich verhalten

$$W : w = \frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda}.$$

Nach dem vorhergehenden §. 5) verhalten sich aber die Widerstände wie die Umfänge P, p, wie die Quadrate der Geschwindigkeiten C, c, und umgekehrt wie die Querschnitte S, s; daher

$$W : w = \frac{P \cdot C^2}{S} : \frac{p \cdot c^2}{s}$$

$$\text{oder } \frac{A}{L} : \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{P \cdot C^2}{S} : \frac{p \cdot c^2}{s}.$$

$$\text{Daher } \frac{pc^2}{s} \cdot \frac{A}{L} = \frac{P \cdot C^2}{S} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$\text{oder } c^2 = C^2 \cdot \frac{P}{S} \cdot \frac{L}{A} \cdot \frac{s}{p} \cdot \frac{\alpha}{\lambda},$$

$$\text{folglich } c = C \cdot \sqrt{\left(\frac{P \cdot L}{S \cdot A}\right)} \cdot \sqrt{\left(\frac{s \cdot \alpha}{p \cdot \lambda}\right)}.$$

Hat man nun aus genauen Versuchen den Werth $C \cdot \sqrt{\left(\frac{P \cdot L}{S \cdot A}\right)}$ bestimmt, wo man bey mehrern Flüssen P, L, S, A gemessen und C aus Beobachtungen gefunden hat: so lässt sich leicht für jeden Strom, unter den vorausgesetzten Umständen, die mittlere Geschwindigkeit c aus den bekannten Größen s, p, α, λ oder eine von diesen aus den übrigen finden.

Wenn alle Größen sich auf Pariser Zolle beziehen, so ist nach einer Mittelzahl von 36 Buat-

schen Beobachtungen $C \cdot \sqrt{\left(\frac{P \cdot L}{S \cdot A}\right)} = 309{,}47$, daher die mittlere Geschwindigkeit

$$1)\quad c = 309{,}47 \cdot \sqrt{\left(\frac{s}{p} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ in Paris. Zollen.}$$

Will man die Größen c, s, p, α, λ in Pariser Fußmaß ausdrücken: so erhält man

$$12 \cdot c = 309{,}47 \cdot \sqrt{\left(\frac{144 \cdot s \cdot 12 \cdot \alpha}{12 p \cdot 12 \cdot \lambda}\right)} \text{ oder}$$

$$c = \frac{309{,}47}{12} \cdot \sqrt{\left(\frac{12 s \cdot \alpha}{p \cdot \lambda}\right)}$$

$$= \frac{309{,}47}{\sqrt{12}} \cdot \sqrt{\left(\frac{s \cdot \alpha}{p \cdot \lambda}\right)} \text{ oder}$$

$$2)\quad c = 89{,}3363 \cdot \sqrt{\left(\frac{s \cdot \alpha}{p \cdot \lambda}\right)} \text{ Pariser Fuß.}$$

Um die Größen c, s, p, α, λ in Leipziger Fußmaß darzustellen: so erwäge man, daß 1 Leipziger Fuß = 0,87 Pariser Fuß beträgt; daher

$$0{,}87 \cdot c = 89{,}3363 \cdot \sqrt{\left(\frac{0{,}87^2 \cdot s}{0{,}87 \cdot p} \cdot \frac{0{,}87 \cdot \alpha}{0{,}87 \cdot \lambda}\right)}$$

$$= 89{,}3363 \cdot \sqrt{\left(\frac{0{,}87 \cdot s}{p} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)} \text{ oder}$$

$$c = \frac{89{,}3363}{\sqrt{0{,}87}} \cdot \sqrt{\left(\frac{s \cdot \alpha}{p \cdot \lambda}\right)}, \text{ d. i.}$$

$$3)\quad c = 95{,}77 \cdot \sqrt{\left(\frac{s \cdot \alpha}{p \cdot \lambda}\right)} \text{ Leipziger Fuß.}$$

Da 1 Rheinl. Fuß = 0,966 Pariser, so ist in Rheinl. Fußmaß

$$4)\quad c = 90{,}9 \cdot \sqrt{\left(\frac{s \cdot \alpha}{p \cdot \lambda}\right)}.$$

Beyspiel I. Ein Fluß, dessen Querprofil 100 Fuß Umfang und 600 Quadratfuß Inhalt hat, besitzt auf 1200 Fuß 3 Zoll = 0,25 Fuß Gefälle; wie groß wird die mittlere Geschwindigkeit des Wassers seyn, wenn vorausgesetzt wird, daß auf die Weite von 1200 Fuß Profil und Richtung des Stroms beynahe ungeändert bleiben? Nach 3) ist

$$c = 95{,}77 \cdot \sqrt{\left(\frac{600 \cdot 0{,}25}{100 \cdot 1200}\right)} = 3{,}386 \text{ Fuß.}$$

Beyspiel II. Ein Fluß hat auf 400 Fuß gerade 8 Zoll = $\frac{2}{3}$ Fuß Gefälle, sein Querschnitt beträgt 120 Quadratfuß und sein Umfang 36 Fuß: so ist seine mittlere Geschwindigkeit

$$c = 95,77 \cdot \sqrt{\left(\frac{120 \cdot 2}{36 \cdot 400 \cdot 3}\right)} = 7,138 \text{ Fuß}.$$

Zusatz I. Wird die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch den Querschnitt läuft = M gesetzt, so ist

$$1)\ M = c \cdot s = 95,77 \cdot s \cdot \sqrt{\left(\frac{s \cdot \alpha}{p \cdot \lambda}\right)},$$

and hieraus der Inhalt des Querschnitts

$$2)\ s = \sqrt[3]{\frac{M^2 p \lambda}{95,77^2 \cdot \alpha}}.$$

Ferner der Umfang oder die Wand des Querschnittes

$$3)\ p = \frac{95,77^2 \cdot s^3 \cdot \alpha}{M^2 \cdot \lambda}.$$

Das Gefälle

$$4)\ \alpha = \frac{M^2 \cdot \lambda p}{95,77^2 \cdot s^3},$$

und die dazu gehörige Länge

$$5)\ \lambda = \frac{95,77^2 \cdot s^3 \cdot \alpha}{M^2 \cdot p}.$$

Zusatz II. Für rechtwinkliche Querprofile, wenn h die Höhe und b die Breite ist, erhält man $s = bh$, $p = b + 2h$; daher in diesem Falle die mittlere Geschwindigkeit

$$1)\ c = 95,77 \cdot \sqrt{\left(\frac{bh}{b + 2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)},$$

und die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch den Querschnitt läuft

$$2)\ M = 95,77 \cdot b \cdot h \sqrt{\left(\frac{bh}{b + 2h} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

Die Breite des rechtwinklichen Profils

$$3)\ b^3 - \left(\frac{M^2 \cdot \lambda}{95,77^2 \cdot h^3 \cdot \alpha}\right) \cdot b - 2\left(\frac{M^2 \lambda}{95,77^2 \cdot h^3 \cdot \alpha}\right) h = 0,$$

oder nach 1)

$$4)\ b = \frac{hc^2}{95,77^2 \cdot h \cdot \frac{\alpha}{2\lambda} - \frac{c^2}{2}}.$$

Die Höhe des rechtwinklichen Profils nach 2)

$$5)\ h^3 - 2\left(\frac{M^2 \cdot \lambda}{95,77^2 \cdot b^3 \cdot \alpha}\right) \cdot h - \left(\frac{M^2 \lambda}{95,77^2 \cdot b^3 \cdot \alpha}\right) b = 0,$$

oder nach 4)

$$6)\ h = \frac{bc^2}{95,77^2 \cdot b \cdot \frac{\alpha}{\lambda} - 2c^2}.$$

Das Gefälle nach 2) und 4)

$$7)\ \alpha = \frac{b+2h}{95{,}77^2 \cdot b^3 \cdot h^3} \cdot M^2 \lambda, \text{ auch}$$

$$\alpha = \frac{c^2 (2h+b) \lambda}{95{,}77^2 \cdot bh} = \frac{c^2 \cdot p \cdot \lambda}{95{,}77^2 \cdot s},$$

und die dazu gehörige Länge

$$8)\ \lambda = \frac{95{,}77^2 \cdot b^3 \cdot h^3 \alpha}{(b+2h) M^2}, \text{ auch}$$

$$= \frac{95{,}77^2 \cdot bh\alpha}{c^2 (2h+b)} = \frac{95{,}77^2 \cdot s \cdot \alpha}{c^2 \cdot p}.$$

Beyspiel I. Ein Fluß habe auf 400 Fuß 8 Zoll oder $\frac{2}{3}$ Fuß Gefälle, sein Querschnitt beträgt 120 Quadratfuß, und sein Umfang 36 Fuß: so ist nach Zus. I 1) die in jeder Secunde durch seinen Querschnitt fließende Wassermenge

$$M = 95{,}77 \cdot 120 \cdot \sqrt{\frac{120 \cdot 2}{36 \cdot 400 \cdot 3}} = 856{,}6 \text{ Cubikfuß.}$$

Beyspiel II. Ein rechtwinkliches Gerinne ist 3 Fuß breit und die Höhe des Wassers in selbigem 1 Fuß, sein Gefälle beträgt auf 100 Fuß 2 Zoll oder $\frac{1}{6}$ Fuß; man sucht die mittlere Geschwindigkeit des Wassers? Nach Zus. II. 2) ist

$$c = 95{,}77 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 1}{3+2} \cdot \frac{1}{6 \cdot 100}} = 3{,}028 \text{ Fuß.}$$

Daher die in jeder Secunde durchfließende Wassermenge $= M = c \cdot s = 3{,}028 \cdot 3 = 9{,}084$ Cubikfuß.

Beyspiel III. Wie groß wird die Breite eines rechtwinklichen Gerinnes seyn müssen, wenn das Wasser in demselben $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch stehen, und bey einem Gefälle von 2 Zoll auf 100 Fuß sich mit einer Geschwindigkeit von 3 Fuß bewegen soll? Nach Zus. II. 4) ist

$$b = \frac{1{,}5 \cdot 3^2}{95{,}77^2 \cdot 1{,}5 \cdot \frac{1}{2 \cdot 6 \cdot 100} - \frac{3^2}{2}} = 1{,}94 \text{ Fuß.}$$

Beyspiel IV. Wie groß muß das Gefälle eines 6 Fuß breiten Gerinnes auf die Länge von 100 Fuß seyn, damit in demselben das Wasser $1\frac{1}{2}$ Fuß hoch stehe, und in jeder Secunde 60 Cubikfuß Wasser abfließen? Nach Zus. II. 7)

$$\alpha = \frac{6+2 \cdot 1{,}5}{95{,}77^2 \cdot 6^3 \cdot 1{,}5^3} \cdot 60^2 \cdot 100 = 0{,}4846 \text{ Fuß}$$

Beyspiel V. Wie groß ist das Gefälle, welches ein in der Sohle 6 Fuß breiter, 3 Fuß tiefer und auf beyden Seiten mit einer einfüssigen Dossirung (auf 1 Fuß Tiefe 1 Fuß Breite) versehener Abzugsgraben auf 1200 Fuß Länge haben muß, da-

mit das Wasser sich mit einer Geschwindigkeit von 1 Fuß in demselben bewege? Wenn die Unterbreite des Profils 6 Fuß ist, so wird die Oberbreite bey 3 Fuß Tiefe und einflüssiger Dossirung 12 Fuß, also $s = 27$ Quadratfuß, $p = 6 + 2 \cdot \sqrt{18} = 14{,}48$ Fuß, $\lambda = 1200$ Fuß, daher das Gefälle nach Zus. II. 7)

$$\alpha = \frac{1^2 \cdot 14{,}48 \cdot 1200}{95{,}77^2 \cdot 27} = 0{,}07017 \text{ Fuß}$$
$$= 0{,}84 \text{ Zoll.}$$

Zusatz III. Die Gestalt, welche man einem Stromprofil bey unverändertem Flächeninhalt gibt, ist nicht gleichgiltig; denn das Wasser wird desto langsamer fließen, je größer der Umfang des Profils in Bezug auf die zugehörige Fläche ist. Dieß ist eine von den vorzüglichsten Ursachen mit, daß sich die Geschwindigkeit der Flüsse bey einem niedrigen Wasserstande vermindert, und weshalb kleine Bäche, die mit großen Flüssen einerley Gefälle haben, öfters weit langsamer fließen, als letztere.

Unter allen Flächen hat die Kreisfläche den kleinsten Umfang, und da die Oberfläche des Wassers bey einem Profil als Umfang oder Wand nicht in Rechnung kommt, so muß auch unter allen Profilen von gleichem Inhalt dasjenige den kleinsten Umfang haben, welches einer halben Kreisfläche am nächsten kommt.

Eben dieß gilt von dem halben Quadrat in Hinsicht der vierseitigen Figuren, weshalb dasjenige rechtwinkliche Gerinne, welches zur Abführung einer bestimmten Wassermenge dienen soll, nicht nur das wenigste Holz erfordert, sondern auch das Wasser am schnellsten abführt, wenn die Höhe halb so groß als die Grundlinie ist. Die halbe Kreisfläche und das halbe Quadrat sind bey steinernen und hölzernen Gerinnen anwendbar.

Unter den trapezförmigen Profilen hat das halbe Sechsseit den kleinsten Umfang. Hierbey kommt es vorzüglich wegen der hinlänglichen Dossirung auf die Beschaffenheit des Bodens an. Im sehr sandigen oder lockern Boden gibt man den Seiten eine Neigung von 36° bis 45°, im festern etwas thonigen Boden aber eine Neigung von 55° bis 75°. Um daher ein trapezförmiges Profil im sandigen Boden anzugeben, welches hinlängliche Dossirung und dabey den möglichst kleinsten Umfang hat: so kann dazu das rechtwinkliche Profil dienen, wenn man dessen Breite in sechs gleiche Theile theilt, und davon drey Theile zur Höhe, zehn Theile zur Oberbreite, und zwey Theile zur

Unterbreite des trapezförmigen Profils nimmt, in welchem Falle alsdann die Grundlinie der Uferböschung $\frac{4}{3}$ von der Höhe ist.

Um aber ein trapezförmiges Profil im festern Boden anzuordnen, so gebe man dem Grabenprofil die Form eines halben regulären Sechsseits, wo, wenn das Trapez mit einem Rectangel, dessen Grundlinie doppelt so groß als die Höhe ist, gleichen Umfang haben soll, jede Seite des halben regulären Sechsseits $\frac{1}{3}$ von dem Umfange des Rectangels seyn muß.

Erstres Trapez heiße das flache, und dieses letztere das steile.

Man setze die Höhe des Rectangels von der vortheilhaftesten Gestalt $= h$, so ist seine Grundlinie oder Breite $= 2h$, der Umfang $= 4h$, und der Inhalt $= 2h^2$.

Von dem flachen Trapez, welches mit dem Rectangel gleichen Umfang hat, findet man die Höhe $= \frac{3}{3} \cdot h = h$, die Oberbreite $= \frac{10}{3} \cdot h$, die Unterbreite $= \frac{2}{3} \cdot h$, den Inhalt $= 2h^2$, und hiernach überhaupt für das Rectangel und flache Trapez die mittlere Geschwindigkeit

$$1)\quad c = 95{,}77 \cdot \left(\frac{h}{2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right),$$

ferner für das Rectangel und flache Trapez die Wassermenge

$$2)\quad M = 2h^2c = 2 \cdot 95{,}77 \cdot h^2 \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{2} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)} = 135{,}44 \cdot h^2 \cdot \sqrt{\left(h \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)},$$

die Höhe

$$3)\quad h = \sqrt{\frac{M}{2c}} = \sqrt[5]{\left(\frac{M^2 \cdot \lambda}{(2 \cdot 95{,}77)^2 \cdot \alpha}\right)} = 0{,}1222 \cdot \sqrt[5]{\left(M^2 \cdot \frac{\lambda}{\alpha}\right)},$$

das Gefälle

$$4)\quad \alpha = \frac{2c^2 \cdot \lambda}{95{,}77^2 \cdot h} = 0{,}000218 \cdot \frac{c^2 \cdot \lambda}{h}.$$

Für das steile Trapez findet man, wenn man die Unterbreite $= b$ nennt, die Oberbreite $= 2b$, die Höhe oder Tiefe des Wassers $= h = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{3}$, den Inhalt $= s = \frac{3b^2}{4} \cdot \sqrt{3}$, den Umfang $= p = 3b$. Demnach die mittlere Geschwindigkeit des Wassers im steilen Trapez

$$5)\quad c = 95{,}77 \cdot \sqrt{\left(\frac{b\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)} = 63{,}02 \cdot \sqrt{\frac{b \cdot \alpha}{\lambda}},$$

die Wassermenge in jeder Secunde

$$6)\quad M = c \cdot s = 95{,}77 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} \cdot \sqrt{\left(b^5 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}$$

$$= 62{,}2 \cdot \sqrt{\left(b^5 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)} = 81{,}86 \cdot \sqrt{\left(b^5 \cdot \frac{\alpha}{\lambda}\right)}.$$

Hieraus

$$7)\ b = \frac{4c^2 \cdot \lambda}{95{,}77^2 \cdot \alpha\sqrt{3}} = 0{,}000252 \cdot \frac{c^2 \cdot \lambda}{\alpha},\ \text{oder auch}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{M^2 \cdot \lambda}{62{,}2^2 \cdot \alpha\sqrt{3}}} = 0{,}1717 \cdot \sqrt[5]{\frac{M^2 \cdot \lambda}{\alpha}},$$

$$8)\ \alpha = \frac{4c^2 \cdot \lambda}{95{,}77^2 \cdot b \cdot \sqrt{3}} = 0{,}000252 \cdot \frac{c^2 \cdot \lambda}{b},\ \text{oder auch}$$

$$= \frac{M^2 \cdot \lambda}{62{,}2^2 \cdot b^5 \cdot \sqrt{3}} = 0{,}000149 \cdot \frac{M^2 \cdot \lambda}{b^5}.$$

$$9)\ \lambda = \frac{95{,}77^2 \cdot \alpha \cdot b\sqrt{3}}{4c^2} = 3971{,}55 \cdot \frac{\alpha \cdot b}{c^2},\ \text{auch}$$

$$= \frac{62{,}2^2 \cdot \alpha \cdot b^5 \cdot \sqrt{3}}{M^2} = 6702 \cdot \frac{\alpha \cdot b^5}{M^2}.$$

Anmerkung I. Zur Erleichterung der Rechnung ist:

log	63,02	= 1,79948,	log	0,000149	= 0,17380 — 4
=	81,86	= 1,91310,	=	0,000218	= 0,33857 — 4
=	135,44	= 2,13175,	=	0,000252	= 0,40104 — 4
=	3971,55	= 3,59896,	=	0,1222	= 0,08709 — 1
=	6702	= 3,82620,	=	0,1717	= 0,23476 — 1.

Anmerkung II. Will man ein Trapez angeben, das bey einem gegebenen Neigungswinkel $= \alpha$ der gegebenen Wandseite $= a$ gegen die Unterbreite $= b$ eines Canals, Grabens ꝛc. den kleinsten Umfang hat: so muß die Unterbreite $b = 2a(1 - \cos\alpha)$ seyn. Ist $\alpha = 90°$, so ist a die Tiefe $= h$ des Grabens, und dann $b = 2a = 2h$, wie oben. Im erstern Falle ist die Oberbreite $= b + 2a \cdot \cos\alpha$, die Tiefe $h = a \cdot \sin\alpha$, daher sich für einen gegebenen Inhalt A die Seite a leicht finden lässt, nämlich $a = \sqrt{\left(\frac{A}{2\sin\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha}\right)}$.

Beyspiel I. Die Tiefe eines trapezförmigen Grabens soll 9 Fuß betragen; wie groß hat man für das flache und steile Trapez Ober- und Unterbreite zu nehmen? Weil $h = 9$ Fuß, so ist für das flache Trapez

die Oberbreite $= \frac{10}{3} \cdot h = \frac{10}{3} \cdot 9 = 30$ Fuß,

die Unterbreite $= \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ =

Für das steile Trapez ist

die Oberbreite $= 2b = \frac{4h}{\sqrt{3}} = \frac{4 \cdot 9}{\sqrt{3}} = 20{,}8$ Fuß,

die Unterbreite $= b = \frac{2h}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 9}{\sqrt{3}} = 10{,}4$ =

Beyspiel II. Die Unterbreite eines trapezförmigen Grabens beträgt 8 Fuß, welches wird die Oberbreite und Tiefe für ein flaches und steiles Trapez seyn? Es heiße die Unterbreite $= b$, so ist für das flache Trapez

die Tiefe $h = \frac{3}{2} \cdot b = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12$ Fuß.
die Oberbreite $= \frac{10}{3} \cdot h = \frac{10}{2} \cdot b = \frac{10}{2} \cdot 8 = 40$ Fuß.
Für das steile Trapez ist
die Tiefe $h = b \cdot \sqrt{3} = \frac{8}{2} \cdot \sqrt{3} = 6,9$ Fuß,
die Oberbreite $= 2b = 2 \cdot 8 = 16$ Fuß.

Beyspiel III. Die Oberbreite eines trapezförmigen Grabens beträgt 24 Fuß; wie groß wird die Tiefe und Unterbreite für ein flaches und steiles Trapez seyn? Es heiße die Oberbreite $= B$, so ist für das flache Trapez

die Tiefe $h = \frac{3}{10} \cdot B = \frac{3}{10} \cdot 24 = 7,2$ Fuß,
die Unterbreite $b = \frac{2}{10} \cdot B = 0,2 \cdot 24 = 4,8$ Fuß.

Für das steile Trapez ist, weil $\frac{4h}{\sqrt{3}} = 2b = B$,

die Tiefe $h = \frac{B \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{24}{4} \cdot \sqrt{3} = 10,4$ Fuß,
die Unterbreite $b = \frac{B}{2} = \frac{24}{2} = 12$ Fuß.

Beyspiel IV. Ein rechtwinkliches Gerinne, dessen Breite doppelt so groß als die Tiefe des Wassers ist, hat auf 960 Fuß 1 Fuß Gefälle, und das Wasser steht 2 Fuß hoch im Gerinne; wie groß wird die abfließende Wassermenge für jede Secunde seyn? Nach §. 140. Zus. II. 2) ist

$$M = 95,77 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{4 \cdot 2}{4+4} \cdot \frac{1}{960}\right)} = 24,73 \text{ Cubikfuß.}$$

Beyspiel V. In einem rechtwinklichen Gerinne sollen in jeder Secunde 15 Cubikfuß Wasser mit einer mittlern Geschwindigkeit von 6 Fuß abgeführt werden; wie müssen die Abmessungen desselben beschaffen seyn, damit solches den kleinstmöglichen Abhang auf 100 Fuß erhält? Nach Zus. III. 2) ist die Höhe des Wassers im Gerinne oder $h = \sqrt{\frac{M}{2c}} = \sqrt{\frac{15}{2 \cdot 6}} = 1,118$ Fuß, und daher die Breite $b = 2h = 2,236$ Fuß. Demnach das Gefälle auf 100 Fuß nach Zus. III. 4) oder

$$\alpha = 0,000218 \cdot \frac{6^2 \cdot 100}{1,118} = 0,7021 \text{ Fuß} = 8,4 \text{ Zoll.}$$

Beyspiel VI. Man soll einen Graben anlegen lassen, welcher auf 1000 Fuß 1 Fuß Gefälle hat, und der in jeder Minute 12 Räder Wasser oder 1200 Cubikfuß, oder in jeder Secunde = 20 Cubikfuß Wasser abführt; wie müssen die Abmessungen seines Querprofils nach beyden Trapezen des Zus. III. beschaffen seyn? Für das flache Trapez ist nach Zus. III. 3) die Tiefe des Wassers oder

$$h = 0,1222 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{20^2 \cdot 1000}{1}\right)} = 1,612 \text{ Fuß.}$$

Demnach die Oberbreite der Wasserfläche $= \frac{10}{3} \cdot h = \frac{10}{3} \cdot 1{,}612 = 5{,}373$ Fuß, und die Unterbreite $= \frac{2}{3} \cdot h = \frac{2}{3} \cdot 1{,}612 = 1{,}074$ Fuß. Rechnet man 1 Fuß Tiefe wegen des Wellenschlages, so ist die hierzu nöthige Böschung auf jeder Seite $= \frac{1 \cdot (5{,}373 - 1{,}074)}{2 \cdot 1{,}612} = 1{,}333$ Fuß (denn $1{,}612 : 1 = \frac{5{,}373 - 1{,}074}{2} : x$). Daher ist die obere Breite des Grabens $= 5{,}373 + 2 \cdot 1{,}333 = 5{,}373 + 2{,}666 = 8{,}039$ Fuß. Für das steile Trapez ist nach Zus. III. 7) die Unterbreite

$$b = 0{,}1717 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{20^2 \cdot 1000}{1}\right)} = 2{,}265 \text{ Fuß.}$$

Demnach die obere Breite der Wasserfläche $= 2b = 2 \cdot 2{,}265 = 4{,}53$ Fuß. Die Tiefe des Wassers $= h = \frac{b}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{2{,}265}{2} \cdot \sqrt{3} = 1{,}962$ Fuß. Rechnet man auch hier 1 Fuß Tiefe wegen des Wellenschlags: so ist, weil der Böschungswinkel der Grabenseiten $= 60°$ ist, die auf 1 Fuß nöthige Böschung $= 1 \cdot \operatorname{cotg} 60° = 1 \cdot 0{,}5773 = 0{,}58$ Fuß; also die obere Breite des Grabens $= 4{,}53 + 2 \cdot 0{,}58 = 4{,}53 + 1{,}16 = 5{,}69$ Fuß.

Zusatz IV. Die mittlere Geschwindigkeit in einem Querprofile, von welcher bisher die Rede gewesen, muß man nicht mit der mittlern Geschwindigkeit, welche in irgend einer verticalen Tiefe desselben vom Wasserspiegel bis aufs Grundbette Statt findet, verwechseln, weil dieses nur die mittlere Geschwindigkeit für eine Linie, jenes aber für eine Fläche ist.

Für eine bestimmte verticale Tiefe, wenn die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche mittels leicht schwimmender Körper gemessen ist, findet man die dazu gehörige mittlere Geschwindigkeit durch folgende Rechnung.

Wenn nämlich c die Geschwindigkeit des Wassers in irgend einer Gegend an der Oberfläche, h die verticale Wassertiefe in dieser Gegend, und v die mittlere Geschwindigkeit bey dieser Tiefe bezeichnet: so kann man den Beobachtungen gemäß im Durchschnitt annehmen, daß sich die Geschwindigkeit des Wassers auf jeden Fuß Tiefe um den $\frac{8}{1000}$ Theil der Geschwindigkeit an der Oberfläche vermindert, so daß auf die ganze Tiefe von h Fuß die Geschwindigkeit c um $0{,}008 \cdot c \cdot h$ abgenommen hat, und daher am Grundbette $= c - 0{,}008 \cdot c \cdot h$ ist. Aus der obern und untern Geschwindigkeit findet man die mittlere $v = \frac{c + c - 0{,}008\, ch}{2} = c - 0{,}004 \cdot c \cdot h = c\,(1 - 0{,}004\, h)$ Fuß, wenn c und h in Fussen gemessen sind.

Beyspiel. Für eine Tiefe h = 12 Fuß sey die Geschwindigkeit c an der Oberfläche = 3 Fuß, so ist die mittlere Geschwindigkeit für diese Verticale = v = 3 (1 — 0,004 · 12) = 3 (1 — 0,048) = 3 · 0,952 = 2,856 Fuß.

Anmerkung I. Will man die Wassermenge, welche durch ein Querprofil fließt, wissen: so muß man nach letztern Zus. IV. auf der obersten Linie des Querprofils in verschiednen Entfernungen quer über den Fluß für die dazu gehörigen Tiefen oder Streifen die mittleren Geschwindigkeiten aus den an der Oberfläche beobachteten Geschwindigkeiten bestimmen, und hieraus die Wassermenge für jeden einzelnen Streifen nach §. 129. 1) berechnen, wo sodann die Summe aller Producte die gesuchte Wassermenge gibt.

Anmerkung II. Nennt man den Inhalt des Querschnittes eines Flusses, Grabens ꝛc. = s Quadratfuß, und ein leichter Körper durchlaufe auf der Oberfläche des Wassers in t Secunden = l Fuß: so rechtfertiget nach Prony die Erfahrung für die in den Graben in jeder Minute fließende Wassermenge folgenden Ausdruck, nämlich die Wassermenge

$$M = \tfrac{4}{5} \cdot s \cdot \frac{l \cdot 60}{t} = \frac{48 \cdot s \cdot l}{t} \text{ Cubikfuß.}$$

Anmerkung III. Zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche bedient man sich leichter Körper, z. B. hohler Kugeln, eines kleinen Talk- oder Inseltlichtes ꝛc., und zur Bestimmung der Geschwindigkeit des Wassers in verschiednen Tiefen entweder des hydrometischen Flügels des Hrn. Woltmann oder der Röhre des Pitot. Mehr hierüber findet man in Brünings Abhandlung über die Geschwindigkeit des fließenden Wassers ꝛc. Frkf. a. M. 1784. 4.

Drittes Kapitel.

Von der Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen.

§. 141.

Erklärung. Ein hohles Cylinderstück, dessen Länge ein Mehrfaches des Durchmessers ist, heißt eine Röhre, und eine Verbindung von mehrern der Axe nach an einander gestoßnen Röhren,

durch welche eine flüssige Materie, z. B. Wasser, geleitet wird, heißt eine **Röhrenleitung**. Sie heißt **Strang**, wenn sie einfach ist, und **Röhrenfahrt**, wenn sie aus mehr als einem Strange besteht.

Anmerkung. Sehr lange Zeit nahm man an, daß eine Röhrenleitung gleiche Wassermenge gebe, sie möchte lang oder kurz seyn, wenn nur Druckhöhe und Röhrenweite ungeändert blieben. Herr du Buat hat das große Verdienst, zuerst einen allgemeinen Ausdruck mitgetheilt zu haben, welcher mit den Erfahrungen gut übereinstimmt, und der bloß den Fehler hat, daß er wegen seiner verwickelten Form nur mit vieler Weitläufigkeit Anwendung findet. Um diese zu vermeiden, und doch den Erfahrungen so nahe zu kommen, als es für die Ausübung nöthig ist: so hat der Herr Geheime Oberbaurath Eytelwein eine sehr lichtvolle und gründlich durchdachte Theorie über die Bewegung des Wassers in Röhrenleitungen aufgestellt, welche nicht nur ihrer Geschmeidigkeit halber zu empfehlen ist, sondern auch, wie sich aus den Vergleichungen mit der Erfahrung ergibt, für die Ausübung hinlänglich genau mit den Versuchen übereinstimmt.

§. 142.

Erklärung. Wenn unter **Druckhöhe** der lothrechte Abstand des Wasserspiegels im Behälter vom Mittelpuncte der Ausflußöffnung der Röhrenleitung verstanden wird: so kann man sich vorstellen, daß von der ganzen Druckhöhe ein Theil zur Erzeugung der Geschwindigkeit des Wassers in der Röhrenleitung verwandt wird, der übrig bleibende Theil aber, als Druck zur Ueberwältiguug der Hindernisse der Bewegung oder des Widerstandes in der Röhrenleitung aufgeht. Ersteren Theil nennt man die **Geschwindigkeitshöhe**, letztern die **Widerstandshöhe**.

Zusatz. Wenn daher für eine Röhrenleitung h die Druckhöhe, und h' die Widerstandshöhe ist, so erhält man die Geschwindigkeitshöhe $= h - h'$. Ist nun c die mittlere Geschwindigkeit, mit welcher sich das Wasser in der Röhrenleitung

bewegt, so ist zu deren Hervorbringung eine Höhe $\frac{c^2}{\alpha^2}$ [§.130. Zus. VII.8)] erforderlich, wo man wegen der Zusammenziehung bey dem Eintritte in die Röhre, $\alpha = 6{,}77$ [§. 130. Zus. VII.5)], für Leipziger Fußmaß und $\alpha = 6{,}42$ für Rheinl. Fußmaß setzen muß. Nun ist $\frac{c^2}{\alpha^2} = h - h'$, daher findet man aus der bekannten Druckhöhe und Geschwindigkeit c die Widerstandshöhe $h' = h - \frac{c^2}{\alpha^2}$.

§. 143.

Aufgabe. Die mittlere Geschwindigkeit, womit das Wasser aus einer Röhrenleitung fließt, durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Nennt man bey zwey verschiednen Röhrenleitungen
H, h die Druckhöhen,
H', h' die Widerstandshöhen,
L, l die Längen der Röhren,
D, d die Durchmesser derselben, und
C, c die mittlern Geschwindigkeiten, mit welchen das Wasser aus den Röhren läuft:

so verhält sich in beyden Röhren

1) bey einerley Geschwindigkeit und einerley Röhrenweite
$$H' : h' = L : l,$$
weil die Widerstände augenscheinlich den Längen proportional sind;

2) wenn beyde Röhren gleiche Längen und Durchmesser haben, aus demselben Grunde wie §.139.3)
$$H' : h' = C^2 : c^2.$$

3) bey einerley Länge der Röhren und einerley Geschwindigkeit des Wassers verhält sich der Widerstand wie die Menge der Berührungspuncte an der innern Röhrenfläche, und umgekehrt wie

die in Bewegung gesetzten Massen, daher wie §. 139. 2) 4)

$$H' : h' = D \cdot d^2 : d \cdot D^2.$$

Folglich, wenn bey beyden Röhren alles verschieden angenommen wird,

$$H' : h' = LC^2Dd^2 : lc^2dD^2$$

$$= \frac{LC^2}{D} : \frac{lc^2}{d},$$

also $\frac{H'lc^2}{d} = \frac{h'LC^2}{D}$ oder $c^2 = \frac{LC^2}{DH'} \cdot \frac{dh'}{l}$,

folglich $c = C \cdot \sqrt{\frac{L}{DH'}} \cdot \sqrt{\frac{dh'}{l}}$.

Nach den aus 51. verschiednen vom Herrn du Buat angestellten Versuchen [Buat's Hydraulik S. 86.] berechneten Werthen, bey welchen Röhren von 1 bis 18 Zoll Weite und 10 bis 700 Fuß Länge vorkommen, findet man in

Pariser Zollmaß $C \cdot \sqrt{\frac{L}{DH'}} = 152{,}47$

Rheinl. Fußmaß - $= 44{,}79$

Leipziger Fußmaß - - $= 47{,}19$

Die Vergleichung dieses Werths mit Versuchen zeigt, daß derselbe am beßten für Geschwindigkeiten von 6 bis 24 Zoll mit der Erfahrung übereinstimmt.

Setzt man die gefundne Zahl in die für c gefundne Gleichung, so wird für Leipz. Fußmaß

$c = 47{,}19 \cdot \sqrt{\frac{dh'}{l}}$, und weil nach §. 142. Zus.

$h' = h - \frac{c^2}{\alpha^2}$, so erhält man

$c = 47{,}19 \cdot \sqrt{\left[\frac{d\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)}{l}\right]}$ oder

$c^2 l = 47{,}19^2 \cdot d\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2}\right)$, also $\frac{c^2 l}{47{,}19^2 \cdot d} + \frac{c^2}{\alpha^2}$

$= h$ oder $c^2 \left(\frac{l}{47{,}19^2 \cdot d} + \frac{1}{\alpha^2}\right) = h$, oder

$$c^2 = \frac{h}{\frac{l}{47{,}19^2 \cdot d} + \frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\alpha^2 h}{\frac{\alpha^2}{47{,}19^2} \cdot \frac{l}{d} + 1}.$$

Nun ist $\alpha = 6,77$, $\alpha^2 = 45,83$, also $\frac{\alpha^2}{47,19^2} = 0,02058$, wofür man $0,02 = \frac{1}{50}$ annehmen kann; es ist daher die mittlere Geschwindigkeit, womit das Wasser aus einer Röhrenleitung fließt, wenn sich alle Größen auf Leipziger Fußmaß beziehen

$$c = \sqrt{\left[\frac{45,83 \cdot h}{0,02 \cdot \frac{l}{d} + 1}\right]} = 6,77 \cdot \sqrt{\left[\frac{50 \cdot dh}{l + 50 \cdot d}\right]}.$$

In Rheinländ. Fußmaß ist

$$c = \sqrt{\left[\frac{41,22 \cdot h}{0,02 \cdot \frac{l}{d} + 1}\right]} = 6,42 \cdot \sqrt{\left[\frac{50 dh}{l + 50 d}\right]}.$$

Anmerkung. In Fällen, wo eine größere Genauigkeit erfordert wird, kann man nach Eytelwein sich des Ausdrucks nach Rheinl. Fußmaß

$$c = \sqrt[35]{\left[\frac{47,24 h}{0,02 \cdot \frac{l}{d} + 1}\right]^{13}},$$

oder nach Leipziger Fußmaß

$$c = \sqrt[35]{\left[\frac{52,52 h}{0,02 \cdot \frac{l}{d} + 1}\right]^{13}}$$

bedienen.

Zusatz I. Es heiße M die Wassermenge, welche in jeder Secunde durch die Leitungsröhre fließt, so ist

$$M = \frac{d^2\pi}{4} \cdot c = \frac{d^2\pi}{4} \cdot 6,77 \cdot \sqrt{\left[\frac{50 dh}{l + 50 d}\right]}$$
$$= 5,32 \cdot d^2 \cdot \sqrt{\left[\frac{50 dh}{l + 50 d}\right]}.$$

Beyspiel. Bey einer geraden Röhrenleitung beträgt die Druckhöhe 5 Fuß, die Länge der Röhre 48 Fuß, und ihr Durchmesser 2 Zoll $= \frac{1}{6}$ Fuß; wie viel Wasser wird bey unveränderter Druckhöhe in jeder Secunde ausfließen?

$$M = 5,32 \cdot \tfrac{1}{36} \cdot \sqrt{\left[\frac{50 \cdot \frac{1}{6} \cdot 5}{48 + 50 \cdot \frac{1}{6}}\right]} = 0,1271 \text{ Cubikfuß} = 219,6$$
Cubikzolle.

Zusatz II. Aus der gefundnen Gleichung $c = \sqrt{\left[\frac{45,83 \cdot h}{0,02 \cdot \frac{l}{d} + 1}\right]}$ erhält man $\frac{45,83 \cdot h}{0,02 \cdot \frac{l}{d} + 1} = c^2$, und hieraus

die Druckhöhe

$$1)\ h = \frac{c^2 \cdot (0{,}02 \cdot \frac{l}{d} + 1)}{45{,}83} = \frac{c^2 (0{,}02 \cdot l + d)}{45{,}83 \cdot d}.$$

Nun ist ferner $c^2 (0{,}02 \cdot l + d) = 45{,}83 \cdot h \cdot d$, oder $0{,}02 \cdot l = \frac{45{,}83 \cdot h \cdot d}{c^2} - d$, folglich die Länge der Röhrenleitung

$$2)\ l = \left[\frac{45{,}83\ h}{c^2} - 1\right] \frac{d}{0{,}02} = \left[\frac{45{,}83 \cdot h}{c^2} - 1\right] 50 d.$$

Ist zur Bestimmung der Werthe h und l die Geschwindigkeit c nicht gegeben, so kann solche allemal mittels M und d nach vorigem Zus. I. gefunden werden.

Zusatz III. Soll man den Durchmesser d aus der Wassermenge M, Druckhöhe h und Länge l finden: so ist nach Zus. I.

$$5{,}32 \cdot d^2 \cdot \sqrt{\left[\frac{50 d h}{l + 50 d}\right]} = M$$

$$\text{oder } 28{,}3 \cdot d^4 \cdot \frac{50 d h}{l + 50 d} = M^2,$$

$$\text{daher } d^5 = \frac{M^2}{28{,}3 \cdot 50 h} \cdot (l + 50 d),$$

$$\text{folglich } d^5 - \frac{M^2}{28{,}3 \cdot h} \cdot d - \frac{M^2}{28{,}3 \cdot h} \cdot \frac{l}{50} = 0,$$

wo d mittels Annäherung gefunden werden kann.

Beyspiel. Wie groß wird man den Durchmesser einer geraden 100 Fuß langen Röhrenleitung bey einer Druckhöhe von 5 Fuß annehmen müssen, damit solche 100 Cubikfuß Wasser in der Minute liefert? Hier ist

$$M = \tfrac{100}{60} = \tfrac{10}{6},\ h = 5,\ l = 100,$$

$$\text{also } \frac{M^2}{28{,}3 \cdot h} = \frac{100}{28{,}3 \cdot 5 \cdot 36} = 0{,}01963,$$

$$\text{und } \frac{M^2}{28{,}3 \cdot h} \cdot \frac{l}{50} = \frac{0{,}01963 \cdot 100}{50} = 0{,}03926,$$

$$\text{daher } d^5 - 0{,}01963 \cdot d - 0{,}03926 = 0.$$

Für d = 0,6 findet man den Rest = − 0,07928
" d = 0,55 " " " " = + 0,00027,
wonach man aus den Resten schließen kann, daß der Werth von d zwischen 0,6 und 0,55 liegen muß.

Für d = 0,55 Fuß findet man nach Zus. I. M = 1,671 Cubikfuß, für d = 0,548 Fuß findet man M = 1,657 Cubikfuß. Da nun $M = \frac{10}{6} = 1{,}66$ Cubikfuß seyn sollte, so kann man immer für den gesuchten Durchmesser d = 0,55 Fuß setzen.

Zusatz IV. Behält eine Röhre ihre unveränderte Weite, so entsteht, wenn Krümmungen in derselben vorkommen,

dadurch ein Aufenthalt in der Bewegung des Wassers, und es wird ein Theil der Druckhöhe zur Ueberwältigung des Widerstandes, der von den Krümmungen herrührt, verwandt werden.

Wenn eine übrigens gerade Röhre so gebogen ist, daß ihre verlängerten Axen bey C [Fig. 84.] zusammentreffen: so sagt man, die Krümmung ist von einer Anprallung. Zieht man durch C die berührende Linie DCE, so ist DCA = ECB der Anprallungswinkel. Finden in einer Krümmung mehrere dergleichen Anprallungen Statt, so sieht man leicht ein, was unter einer Krümmung von zwey, drey und mehrern Anprallungen verstanden wird.

Man hat nach Hrn. du Buats Versuchen geschlossen, daß die im Vorigen gefundne Widerstandshöhe h' der Krümmungen wegen noch um $k = 0{,}00387 \cdot c^2 \cdot S$ vermehrt werden muß, wenn c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre, S die Summe von den Quadraten der Sinusse sämmtlicher Anprallungswinkel, welche Winkel jedoch 36 bis 40 Grad nicht übersteigen dürfen, bedeutet, und alle Größen auf Rheinländ. Fußmaß sich beziehen.

Für Leipziger Fußmaß ist $k = 0{,}00348 \cdot c^2 \cdot S$ zu setzen.

Beyspiel. Eine Röhre sey so gekrümmt, daß in derselben 5 Anprallungen Statt finden, von welcher bey dreyen der Anprallungswinkel 24°, und bey den übrigen zweyen 32° beträgt: so ist bey 5 Fuß Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} S &= 3 \cdot (\sin 24°)^2 + 2 (\sin 32°)^2 \\ &= 3 \cdot 0{,}40674^2 + 2 \cdot 0{,}52992^2 \\ &= 3 \cdot 0{,}16543 + 2 \cdot 0{,}28081 \\ &= 0{,}49629 + 0{,}56162 = 1{,}05791, \end{aligned}$$

und daher $k = 0{,}00348 \cdot 25 \cdot 1{,}05791 = 0{,}092567$ Fuß.

Zusatz V. Um in dem allgemeinen Ausdrucke für die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in Röhrenleitungen auch auf den Widerstand in den Krümmungen Rücksicht zu nehmen: so muß §. 142. Zus. die Widerstandshöhe h' noch um k vermehrt werden, alsdann ist $h' + k = h - \frac{c^2}{\alpha^2}$, oder $h' = h - \frac{c^2}{\alpha^2} - k = h - \frac{c^2}{\alpha^2} - 0{,}00348 \cdot c^2 \cdot S$; daher, wenn auf ähnliche Art wie §. 143. aus $c = 47{,}19 \cdot \sqrt{\left[\frac{d\left(h - \frac{c^2}{\alpha^2} - 0{,}00348 \cdot c^2 \cdot S\right)}{l}\right]}$

die mittlere Geschwindigkeit entwickelt wird

$$c = \sqrt{\left[\frac{45,83 \cdot h}{0,02 \cdot \frac{l}{d} + 0,16 \cdot S + 1}\right]}.$$

Für Rheinl. Fußmaß ist

$$c = \sqrt{\left[\frac{41,22 \cdot h}{0,02 \cdot \frac{l}{d} + 0,16 \cdot S + 1}\right]}.$$

Beyspiel. Eine gekrümmte Röhrenleitung hat 6 Fuß Druckhöhe und $\frac{1}{4}$ Fuß Röhrenweite; wie viel Cubikfuß Wasser werden in einer Secunde ausfließen, wenn diese Röhre nach ihren Krümmungen gemessen 50 Fuß lang ist, und drey Biegungen macht, deren Anprallungswinkel bey jeder 24° beträgt? Hier ist $h = 6$, $l = 50$, $d = \frac{1}{4}$ Fuß, und $S = 3 \cdot (\sin 24°)^2 = 3 \cdot 0,40674^2 = 3 \cdot 0,16543 = 0,49629$, daher die mittlere Geschwindigkeit $c = \sqrt{\left[\frac{45,83 \cdot 6}{0,02 \cdot 4 \cdot 50 + 0,16 \cdot 0,49629 + 1}\right]}$ $= 7,354$ Fuß, und daher nach §. 143. Zus. I. die Wassermenge $M = 0,785 \cdot \frac{1}{16} \cdot 7,354 = 0,36$ Cubikfuß.

Zusatz VI. Es ist öfters erforderlich, denjenigen Theil der Druckhöhe h zu wissen, welcher als Widerstandshöhe h' zur Ueberwältigung der Hindernisse längs einer Röhre von gegebner Länge l und Weite d für eine bestimmte Geschwindigkeit c erfordert wird. Nach §. 143. ist $47,19 \cdot \sqrt{\frac{dh'}{l}} = c$, oder $47,19^2 \cdot \frac{dh'}{l} = c^2$, daher bey einer bey einer geraden Röhre die Widerstandshöhe $h' = \frac{lc^2}{47,19^2 \cdot d} = \frac{l \cdot c^2}{2226 \cdot d}$.

Für eine gekrümmte Röhre erhält man nach §. 143. Zus. IV. die Widerstandshöhe $h' = \frac{lc^2}{47,19^2 \cdot d} + k = \frac{lc^2}{47,19^2 \cdot d} + 0,00348 \cdot c^2 \cdot S = 0,000449 \cdot \frac{lc^2}{d} + 0,00348 \cdot c^2 \cdot S = 0,000449 \cdot c^2 \left(\frac{l}{d} + 7,7508 \cdot S\right)$.

Anmerkung. Bey der Anordnung einer Röhrenleitung ist vorzüglich darauf zu sehen, daß da, wo sich die Röhren wenden oder eine andere Richtung annehmen, die Biegung keine scharfe Ecke erhalte, sondern bogenförmig nach einem großen Halbmesser gemacht, auch die Röhre, so weit die Biegung geht, allmälich erweitert werde. Wenn mehrere Röhren zusammengestoßen werden, so sind alle plötzliche Verengungen zu vermeiden, weil sonst eine Contraction entsteht, wodurch die Wassermenge vermindert wird. Dagegen kann bey dem Eintritt des Wassers in die Röhren

die nöthige Erweiterung nach der Gestalt des zusammengezognen Strahls [§. 150. Zus. VI.] angebracht werden, wodurch eine Vermehrung der ausfließenden Wassermenge bewirkt wird.

Wenn eine Röhrenleitung eine aufwärts gekehrte Krümmung erhält, so sammlet sich leicht in der höchsten Stelle Luft an, welche den Durchfluß des Wassers verhindert; daher bringt man an solchen Puncten kleine verticale Luftröhren oder sogenannte **Windstöcke** an, durch welche die Luft entweichen kann, ohne daß etwas Wasser verloren geht. In den tiefsten Stellen der Röhren wird sich Schlamm und dergleichen ansetzen, daher man bey mittelmäßig klarem Wasser alle 300 Fuß etwa viereckige Kasten oder sogenannte **Wechselhäuschen** anbringt, in vielen Fällen aber auch mit bloßen Schlammspünden wegkommt, durch die beym Oeffnen das schnell ausfließende Wasser den Schlamm mit ausführt.

§. 144.

Aufgabe. Die mittlere Geschwindigkeit und Wassermenge bey Röhrenleitungen von verschiedner Weite zu finden [Fig. 85.].

Auflösung. Wenn mehrere mit einem Behälter verbundne Röhren von verschiedner Weite bey jedem Ein- und Abfluß mit einer Oeffnung in einer dünnen Platte versehen sind: so bezeichnen bey derjenigen Röhre, aus welcher das Wasser in die freye Luft strömt, a den Inhalt der Ausflußöffnung, c die Geschwindigkeit in derselben, A den Inhalt des Röhrenquerschnitts, D dessen Durchmesser, C die Geschwindigkeit in der Röhre, und L die Länge derselben.

Ferner haben die Größen a', c', A', D', C', L' für die zweyte Röhre eben die Bedeutung, und wenn überhaupt nur zwey Röhren von der Länge L, L' angebracht sind, so sey a'' der Inhalt der Oeffnung, durch welche das Wasser mit der Geschwindigkeit c'' aus dem Behälter fließt.

Fände nun das Wasser bey der Bewegung durch die Röhren L', L keinen Widerstand: so würde erfordert nach §. 134. zur Hervorbringung der Geschwindigkeit c und wegen der Contraction in den Oeffnungen a'', a', a eine Druckhöhe =

$$1)\ c^2\left[\frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{a}{a''}\right)^2}{\alpha^2}-\frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{A'}\right)^2}{4g}\right]$$

Nun findet man nach §. 143. Zus. VI. die Widerstandshöhe, welche zu Ueberwältigung der Hindernisse bey einer Röhre L nöthig ist, $= \frac{C^2 \cdot L}{47{,}19^2\ D}$, oder weil $C = \frac{ac}{A}$ ist, die Widerstandshöhe in der Röhre L, nämlich

$$2) = \left(\frac{ac}{A}\right)^2 \cdot \frac{L}{47{,}19^2 \cdot D} = \left(\frac{ac}{A}\right)^2 \cdot \frac{L}{2226 \cdot D}.$$

Eben so ist wegen der Hindernisse in der Röhre L' die erforderliche Widerstandshöhe =

$$3)\ \left(\frac{ac}{A'}\right)^2 \cdot \frac{L'}{47{,}19^2 \cdot D'} = \left(\frac{ac}{A'}\right)^2 \cdot \frac{L'}{2226 \cdot D'}.$$

Nimmt man diese zur Bewegung des Wassers erforderlichen Höhen 1) 2) 3) zusammen, so erhält man die gesammte Druckhöhe h =

$$c^2\left[\frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{a}{a''}\right)^2}{\alpha^2}-\frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{A'}\right)^2}{4g}+\frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2\cdot\frac{L}{D}+\left(\frac{a}{A'}\right)^2\cdot\frac{L'}{D'}}{2226}\right],$$

oder wenn man die drey Glieder in der Parenthese durch durch E, F, G bezeichnet, so ist die gesammte Druckhöhe $h = c^2 (E - F + G)$, die mittlere Geschwindigkeit

$$c = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{(E-F+G)}},$$

und wenn die Wassermenge $= M$ gesetzt wird, so ist, weil $M = ac$, oder $\frac{M^2}{a^2} = c^2$, die Druckhöhe

$$h = \frac{M^2}{a^2}(E - F + G)$$

oder die Wassermenge

$$M = \frac{a\sqrt{h}}{\sqrt{(E - F + G)}} = a \cdot \sqrt{\frac{h}{E - F + G}}.$$

Beyspiel. Am Ende einer 400 Fuß langen und 3 Zoll $= \frac{1}{4}$ Fuß weiten geraden Röhrenleitung befindet sich in einer dünnen Platte eine 8 Linien oder $\frac{1}{18}$ Fuß weite Oeffnung; wie viel Wasser wird in jeder Secunde auslaufen, wenn der Wasserspiegel des Behälters unverändert 30 Fuß hoch über der Ausflußmündung stehet? Hier ist $h = 30$, $L = 400$, $a = 0{,}785 \cdot \frac{1}{18^2}$, $A = 0{,}785 \cdot \frac{1}{16}$, also $\frac{a}{A} = \frac{16}{324} = \frac{4}{81}$, $\frac{a^2}{A^2} = \frac{16}{6561}$. In diesem Falle ist aber a' (die Einflußöffnung) $= A$; daher, wenn, wie erfordert wird, für die Oeffnung a wie bey einer dünnen Wand der Werth $\frac{1}{\alpha^2} = 0{,}0376$ [§. 130. Zus. VII. 7)], und für a' wie bey einer Ansatzröhre der Werth $\frac{1}{\alpha^2} = 0{,}0218$ [§. 130. Zus. VII. 5)] gesetzt wird, so ist

$$E = \frac{\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2}{\alpha^2} = 0{,}0376 + 0{,}0218 \cdot \frac{16}{6561} = 0{,}03873,$$

$$F = \frac{1}{4g} \cdot \left(\frac{a}{A}\right)^2 = 0{,}014 \cdot \frac{16}{6561} = 0{,}0000348,$$

$$G = \frac{\left(\frac{a}{A}\right)^2 \cdot \frac{L}{D}}{2226} = \frac{16 \cdot 400}{6561 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2226} = 0{,}001753.$$

Dieß gibt $E - F + G = 0{,}03985$, daher findet man die Wassermenge

$$M = 0{,}785 \cdot \frac{1}{18^2} \cdot \sqrt{\frac{30}{0{,}03985}} = 0{,}06651 \text{ Cubikfuß}.$$

Zusatz I. Das Gesetz, wornach die Werthe von E, F, G bey mehrern Röhren bestimmt werden, ist leicht zu übersehen. Bey fünf Röhren und sechs Oeffnungen ist

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{a}{a''}\right)^2+\left(\frac{a}{a'''}\right)^2+\left(\frac{a}{a''''}\right)^2+\left(\frac{a}{a'''''}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{A'}\right)^2+\left(\frac{a}{A''}\right)^2+\left(\frac{a}{A'''}\right)^2+\left(\frac{a}{A''''}\right)^2\right],$$

wo die über einander stehenden Glieder der Reihe E und F zusammengehörige Werthe heißen können.

Sind einige oder sämmtliche Röhrenenden nicht mit Platten verschlossen, in welchen sich Oeffnungen befinden: so können Fälle eintreten, daß zusammengehörige Glieder der vorstehenden Reihen wegfallen. Denn da diese Glieder die erforderliche Druckhöhe zur Erzeugung der Geschwindigkeiten in den Oeffnungen a, a', a'', a''', a'''' ausdrücken: so wird, wenn die folgende Röhre weiter ist als die vorhergehende, am Ende der engern Röhre keine neue Druckhöhe nothwendig, weil keine Contraction vorhanden ist, und das Wasser ohne Hinzusetzung eines neuen Drucks sich in der folgenden weitern Röhre ausbreitet, und die der Weite dieser Röhre entsprechende kleinere Geschwindigkeit annehmen wird. Es fallen daher in den Reihen E und F diejenigen zusammengehörigen Glieder weg, welche zu einer solchen Oeffnung gehören.

Wenn z. B. vier Röhren vorhanden sind, die sich nach Fig. 86. verengen und erweitern: so wäre allgemein

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{a'}\right)^2+\left(\frac{a}{a''}\right)^2+\left(\frac{a}{a'''}\right)^2+\left(\frac{a}{a''''}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{A'}\right)^2+\left(\frac{a}{A''}\right)^2+\left(\frac{a}{A'''}\right)^2\right].$$

Nun findet bey den Oeffnungen a, a', a''' keine Contraction Statt; daher fallen die ersten, zweyten und vierten Glieder in den Parenthesen weg, und man behält

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a''}\right)^2+\left(\frac{a}{a''''}\right)^2\right], \text{ und}$$

$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A''}\right)^2\right],$$

oder weil $a = A$, $a'' = A'$, und $a''' = A'''$ ist: so erhält man

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{A}{A'}\right)^2+\left(\frac{A}{A'''}\right)^2\right]$$

$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{A}{A''}\right)^2\right],$$

und ohne Abänderung

$$G = \frac{1}{2226}\left[\left(\frac{A}{A}\right)^2\cdot\frac{L}{D}+\left(\frac{A}{A'}\right)^2\cdot\frac{L'}{D'}+\left(\frac{A}{A''}\right)^2\cdot\frac{L''}{D''}+\left(\frac{A}{A'''}\right)^2\cdot\frac{L'''}{D'''}\right].$$

Der Werth von α muß den Umständen gemäß jederzeit nach §. 130. Zus. VII. bestimmt werden.

Zusatz II. Wäre die erste Röhre, welche das Wasser aus dem Behälter erhält, zwar enger wie die folgende [Fig. 87.], aber zwischen beyden eine Platte mit einer Oeffnung $a' > A$: so können alsdann die zusammengehörigen Glieder der Reihen E, F für diese Oeffnung nicht wegfallen. Nun erhält man für beyde Röhren allgemein

$$E = \frac{1}{\alpha^2}\left[\left(\frac{a}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{a'}\right)^2 + \left(\frac{a}{a''}\right)^2\right] \text{ und}$$

$$F = \frac{1}{4g}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^2 + \left(\frac{a}{A'}\right)^2 \qquad\right],$$

da denn nun für die Oeffnung a, die ersten zusammengehörigen Werthe wegfallen. Ferner ist $a = A$, $a'' = A'$, daher mit Rücksicht auf die verschiednen Contractionen [§. 130. Zus. VII. 7) und 5)

$$E = 0{,}0376 \cdot \left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0218 \cdot \left(\frac{A}{A'}\right)^2$$

$$F = 0{,}0140 \cdot \left(\frac{A}{A'}\right)^2, \text{ also}$$

$$E - F = 0{,}0376 \cdot \left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0078 \cdot \left(\frac{A}{A'}\right)^2,$$

wonach man die gesammte erforderliche Druckhöhe h zur Erzeugung der Geschwindigkeit c beym Ausflusse finden kann. Diese ist

$$h = c^2\left[0{,}0376 \cdot \left(\frac{A}{a'}\right)^2 + 0{,}0078 \cdot \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \cdot \frac{L'}{D'}}{2226}\right].$$

Ist die Einmündung bey $a'' = A'$ so beschaffen, daß die Contraction daselbst bey Seite gesetzt werden kann (wenn z. B. die Oeffnung a'' die vortheilhafteste Einmündung [§. 130. Zus. VI.] hätte): so fällt in dem allgemeinen Ausdruck für E das dritte Glied $\left(\frac{a}{a''}\right)^2$, oder in dem zweyten Ausdrucke für E das zweyte Glied $\left(\frac{A}{A'}\right)^2$ weg, und man erhält

$$h = c^2\left[0{,}0376 \cdot \left(\frac{A}{a'}\right)^2 - 0{,}014\left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \cdot \frac{L'}{D'}}{2226}\right].$$

Ist $a' = A'$, so ist

$$h = c^2\left[0{,}0236 \cdot \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \cdot \frac{L'}{D'}}{2226}\right].$$

Dieser letztere Ausdruck für h findet bey der Saugpumpe seine Anwendung.

Zusatz III. Wenn $E - F + G = B$ gesetzt wird, so ist ganz allgemein die Druckhöhe h, welche eine Geschwindigkeit c erzeugt, oder $h = c^2 \cdot B$.

Diese Druckhöhe kann man sich aus zwey Theilen bestehend vorstellen, wovon der eine

h'' die Widerstandshöhe zur Ueberwältigung der Hindernisse längs den Röhrenwänden und beym Durchgange durch die verschiednen Oeffnungen, und der andere Theil

$h - h''$ als Geschwindigkeitshöhe zur Hervorbringung und Unterhaltung der Geschwindigkeit c so verwendet wird, als wenn keine Contraction noch sonstige Hindernisse vorhanden wären.

Es ist daher $h - h'' = \frac{c^2}{4g}$, oder $h'' = h - \frac{c^2}{4g} = c^2 \cdot B - \frac{c^2}{4g}$, oder die Widerstandshöhe $h'' = c^2 \left(B - \frac{1}{4g}\right) = c^2 \left(\frac{4gB - 1}{4g}\right)$.

§. 145.

Aufgabe. Mit einem sehr weiten Gefäße ABDC [Fig. 88.], welches beständig bis AB mit Wasser angefüllt erhalten wird, ist eine gleich weite Röhre DEFG verbunden, und mit dieser eine zweyte verticale Röhre FGHI; die Oeffnung DE ist durch eine Scheibe verschlossen, und in den Röhren befindet sich Wasser bis in K. Aus dieser Verbindung und Einrichtung die Zeit, in welcher das Wasser auf die Höhe KL steigt, so wie die am Ende dieser Zeit erlangte Geschwindigkeit des Wassers zu finden.

Auflösung. Die lothrechte Höhe des Wassers im Gefäße AD über der Oeffnung ED sey OP = K, die lothrechte Höhe des Wassers in den Röhren über dieser Oeffnung sey PM = h, die Länge der centrischen Linie in den Röhren vom Mittelpuncte der Oeffnung DE bis zur Oberfläche bey

K sey $= \lambda$, der Querschnitt der Röhre FH $= A$, und der Röhre DG $= A'$: so wird bey plötzlicher Hinwegnahme der Scheibe bey DE, wenn $K > h$ ist, das Wasser durch die Oeffnung DE in die Röhre treten, und ehe es irgend eine lothrechte Höhe MN $=$ b erreicht, dazu eine gewisse Zeit t erfordert werden.

Um diese Zeit für den Fall, daß $K - h > b$ ist, genauer als §. 134. in Rechnung zu bringen, muß zugleich Rücksicht darauf genommen werden, daß das Wasser in der Röhre seine Bewegung von o anfängt, und wie jeder andere Körper eine beschleunigte Bewegung erhält. Es ist aber die Druckhöhe, welche zur Ueberwältigung des Widerstandes in den Röhren und zur Erzeugung der Geschwindigkeit verwandt wird, veränderlich; im Anfange der Zeit $t = K - h$, am Ende derselben $= K - h - b$. Ist nun b nicht beträchtlich groß, so kann man die Druckhöhe als beständig ansehen, und $= K - h - \frac{1}{2}b$ setzen, da dann $K - h - \frac{1}{2}b - h''$ nur noch auf die Hervorbringung der Geschwindigkeit des Wassers verwendet wird [§. 144. Zus. III.]. Bey der zunehmenden Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren ist aber h'' veränderlich, und hängt von der jedesmaligen Geschwindigkeit des Wassers in den Röhren ab. Damit nun für h'' ebenfalls ein mittlerer Werth in die Rechnung gebracht werde: so sey c die mittlere Geschwindigkeit, welche der Druckhöhe $K - h - \frac{1}{2}b - h''$ entspricht, alsdann ist

$$c^2 = 4g\,(K - h - \tfrac{1}{2}b - h''),$$

und $h'' = c^2 \cdot \frac{4gB - 1}{4g}$ [§. 144. Zus. III.],

daher $$h'' = 4g\,(K - h - \tfrac{1}{2}b - h'') \cdot \frac{4gB - 1}{4g}$$

$$= (K - h - \tfrac{1}{2}b) \cdot \frac{4gB - 1}{4gB}.$$

Hieraus findet man die Höhe der Wassersäule, welche so auf die Bewegung des Wassers wirkt, als wenn keine Hindernisse vorhanden wären, oder

$$K-h-\tfrac{1}{2}b-h'' = K-h-\tfrac{1}{2}b-(K-h-\tfrac{1}{2}b)\cdot\frac{4gB-1}{4gB}$$

$$= \frac{4gB}{4gB}(K-h-\tfrac{1}{2}b)-(K-h-\tfrac{1}{2}b)\cdot\frac{4gB-1}{4gB}$$

$$= \frac{4gB-4gB+1}{4gB}\cdot(K-h-\tfrac{1}{2}b)$$

$$= \frac{K-h-\tfrac{1}{2}b}{4gB},$$

und man kann den Druck derselben als bewegende Kraft ansehen, die auf das Wasser in der Röhre wirkt.

Die gesammte Wassermasse in den Röhren, welche in Bewegung gesetzt werden soll, ist anfänglich $= \lambda A'$, wenn man FK als sehr klein annimmt, und am Ende der Zeit $t = \lambda A' + bA$. Wird hier ebenfalls ein Mittel genommen, so erhält man $\lambda A' + \frac{1}{2}bA$. Beyde Massen bewegen sich aber mit verschiedner Geschwindigkeit; ist daher c für irgend einen Zeitpunct die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre FH, so ist in eben diesen Zeitpunct die Geschwindigkeit des Wassers in der Röhre DG $= \frac{cA}{A'}$, daher nach §. 115. Zus. II. die Momente der Trägheit beyder Massen $= \left(\frac{cA}{A'}\right)^2 \cdot \lambda A' + c^2 \cdot \frac{1}{2}bA$.

Eine Masse N mit der Geschwindigkeit c zu bewegen, sey den oben stehenden Massen gleichgiltig [§. 115. Zus. I.]: so erhält man $c^2 N = \left(\frac{cA}{A'}\right)^2 \cdot \lambda A' + c^2 \cdot \frac{1}{2}bA$, und es ist die auf die Geschwindigkeit c reducirte Masse $N = \frac{A^2}{A'} \cdot \lambda + \frac{1}{2}bA$.

Hieraus findet man die Beschleunigung G der Wassermasse N, wenn man $N\gamma$ als das Gewicht

der bewegten Masse, und $\frac{K-h-\frac{1}{2}b}{4gB}\cdot A\gamma$ als die bewegende Kraft ansieht, die auf die Wassermasse N, welche auf die Röhre FH reducirt ist, wirkt, nämlich $G = g\cdot\frac{(K-h-\frac{1}{2}b)\cdot A\gamma}{4gB\cdot N\gamma}$ [§.107. Zus.IV.], oder wenn man für N substituirt und gehörig abkürzt, $G = \frac{K-h-\frac{1}{2}b}{4B(\frac{A}{A'}\cdot\lambda+\frac{1}{2}b)}$.

Nun ist die Zeit, in welcher vermöge der Beschleunigung G der Weg b durchlaufen wird, nämlich $t = \sqrt{\frac{b}{G}}$ [§. 99. 8)]; daher die gesuchte Zeit $t = 2\sqrt{\left[\frac{B\left(\frac{A}{A'}\cdot\lambda+\frac{1}{2}b\right)b}{K-h-\frac{1}{2}b}\right]}$.

Hat das Wasser in der Röhre FH am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit c erlangt, so ist $c = 2\sqrt{G\cdot b}$ [§. 99. 6)], oder $c = \sqrt{\left[\frac{(K-h-\frac{1}{2}b)\,b}{B\left(\frac{A}{A'}\cdot\lambda+\frac{1}{2}b\right)}\right]}$.

Viertes Kapitel.

Von den springenden Wassern.

§. 146.

Erklärung. Springende Wasser heißen solche, welche beym Ausgang aus einer Oeffnung einen Strahl bilden, welcher, ehe er niederfällt, sich vorher zu einer gewissen Höhe erhebt.

Der Strahl steigt nun bey seinem Ausgang aus einer Oeffnung (Mundstück, Aufsatzstück, Gußstück, Mündung) entweder senkrecht in die Höhe, oder er strömt horizontal aus, oder er geht einen Weg, der mit der Horizontalebene einen schiefen

Winkel macht. In beyden letzten Fällen nennt man die Entfernung zwischen der Mündung der Röhre und dem Ort, wo der Strahl irgend eine unter der Mündung gelegte Horizontalebene trifft, die Sprungweite.

Ein springendes Wasser oder ein springender Strahl kann durch den Druck des Wassers in einem Behälter oder durch eine andere drückende Kraft hervorgebracht werden.

Die Röhre, in welcher das Wasser zur Sprungöffnung fließt, heißt die Leitröhre.

§. 147.

Erklärung. Bey der Beurtheilung der Höhe des Strahls kommt es vorzüglich darauf an, welches die größte Geschwindigkeit ist, die das Wasser erhält, wenn es die Mündung verlassen hat, weil der Strahl mit dieser Geschwindigkeit zu steigen anfängt. Nun findet bey einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre keine Zusammenziehung des Strahls Statt, weil derselbe in der ganzen Weite der Röhre fortströmt, daher steigt auch in diesem Falle der Strahl mit einer Geschwindigkeit, die der mittlern Geschwindigkeit in der Aufsatzröhre gleich ist. Bey einer Oeffnung in einer dünnen Platte hingegen zieht sich der Wasserstrahl nach dem Ausflusse zusammen, und erhält einen kleinern Querschnitt, also eine größere Geschwindigkeit, mit welcher er aufwärts steigt, die $\frac{25}{16}$ von der Geschwindigkeit in der Oeffnung ist [§. 130. Zus. III.].

Setzt man den Widerstand der Luft bey Seite: so ist man berechtiget anzunehmen, daß ein Wasserstrahl diejenige Höhe erreicht, welche ein fester Körper erlangen würde, der mit der größten Geschwin-

digkeit des Strahls, womit das Wasser aufwärts steigt, in die Höhe geht. Ist daher z die verticale Strahlhöhe, v die größte Geschwindigkeit, welche das Wasser erhält, wenn es die Mündung verlassen hat, so wird nach §. 100. Zus. II.

$$z = \frac{v^2}{4g}.$$

Zusatz I. Wenn c die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung ist, so erhält man für eine Sprungöffnung in einer dünnen Platte

$$v = \tfrac{25}{16}\cdot c,\ \text{und}\ v^2 = 2{,}4414\cdot c^2,$$

daher die Strahlhöhe

$$z = \frac{2{,}4414}{4g}\cdot c^2 = 0{,}03512\cdot c^2\ \text{Leipz. Fuß.}$$
$$= 0{,}03906\cdot c^2\ \text{Rheinl. Fuß.}$$

Der Werth von c^2 lässt sich leicht nach dem vorigen Kapitel finden. Denn man bezeichne durch h die gesammte Druckhöhe, L die Länge der Leitröhre, D den Durchmesser derselben, A den Inhalt ihres Querschnitts, und durch a den Inhalt der Sprungöffnung: so ist nach §. 144. Zus. II. für Leipziger Fußmaß und eine dünne Platte,

$$c^2 = \frac{h}{0{,}0376 + \left(0{,}0078 + \frac{L}{2226\cdot D}\right)\cdot\frac{a^2}{A^2}}.$$

Für Rheinl. Fußmaß

$$c^2 = \frac{h}{0{,}0417 + \left(0{,}0083 + \frac{L}{2006\cdot D}\right)\cdot\frac{a^2}{A^2}}.$$

Daher die Strahlhöhe

$$z = \frac{h}{1{,}0704 + \left(0{,}24 + 0{,}01419\cdot\frac{L}{D}\right)\frac{a^2}{A^2}}\ \text{Leipz. Fuß,}$$

$$= \frac{h}{1{,}067 + \left(0{,}21 + 0{,}0127\cdot\frac{L}{D}\right)\frac{a^2}{A^2}}\ \text{Rheinl. Fuß.}$$

Ist die Leitröhre sehr kurz, so wird $L = 0$, also

$$z = \frac{h}{1{,}0704 + 0{,}24\cdot\frac{a^2}{A^2}}\ \text{Leipz. Fuß.}$$

$$= \frac{h}{1{,}067 + 0{,}21\cdot\frac{a^2}{A^2}}\ \text{Rheinl. Fuß.}$$

Und wenn die Leitröhre sehr weit ist, so daß man $\frac{a^2}{A^2} = 0$ setzen kann, so ist

$$z = 0{,}934\cdot h\ \text{Leipz. Fuß} = 0{,}936\cdot h\ \text{Rheinl. Fuß.}$$

Zusatz II. Bestehet die Sprungöffnung aus einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre, so findet außerhalb keine Zusammenziehung des Strahles Statt; daher ist $v = c$, $v^2 = c^2$, also die Strahlhöhe

$$z = \frac{1}{4g} \cdot c^2 = 0{,}0143 \cdot c^2 \text{ L. F.} = 0{,}016 \cdot c^2 \text{ R. F.}$$

Nun ist nach §. 144. bey kurzen Ansatzröhren

$$c^2 = \frac{h}{0{,}0218 + \left(0{,}0078 + \frac{L}{2226 \cdot D}\right) \cdot \frac{a^2}{A^2}} \text{ Leipz. F.}$$

$$= \frac{h}{0{,}0243 + \left(0{,}0083 + \frac{L}{2006 \cdot D}\right) \cdot \frac{a^2}{A^2}} \text{ Rheinl. F.}$$

Daher die Strahlhöhe

$$z = \frac{h}{1{,}524 + \left(0{,}5454 + 0{,}03141 \cdot \frac{L}{D}\right) \cdot \frac{a^2}{A^2}} \text{ Leipz. F.}$$

$$= \frac{h}{1{,}518 + \left(0{,}5125 + 0{,}03116 \cdot \frac{L}{D}\right) \cdot \frac{a^2}{A^2}} \text{ Rheinl. F.}$$

Für $L = 0$ wird

$$z = \frac{h}{1{,}524 + 0{,}5454 \cdot \frac{a^2}{A^2}} \text{ Leipz. Fuß.}$$

$$= \frac{h}{1{,}518 + 0{,}5125 \cdot \frac{a^2}{A^2}} \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Und für $\frac{a^2}{A^2} = 0$, wird

$$z = 0{,}66 \cdot h \text{ Fuß.}$$

Anmerkung. Nach der von Mariotte gegebnen Regel soll $z = 10\,[\sqrt{(3h + 225)} - 15]$ seyn, wobey vorausgesetzt wird, daß eine Druckhöhe von $5\frac{1}{12}$ Fuß einen 5 Fuß hohen Strahl hervorbringt. Mariotte hat aber weder auf Leitröhre noch Sprungöffnung Rücksicht genommen.

Einige Versuche mit Sprungöffnungen in einer dünnen Platte nach Rheinl. Maß.

Versuche von	Länge der Leitröhre.	Durchmesser der		Druckhöhe.	Strahlhöhe nach der		
		Leitröhre.	Mündung.		Erfahrung.	obiger Formel	Regel v. Mariotte.
	Fuß.	Zolle.	Lin.	Fuß.	Fuß.	Fuß.	Fuß.
Bossut	5,5	$3\frac{2}{3}$	2	11	10,012	10,29	10,62
"	3,66	$3\frac{2}{3}$	8	11	10,542	10,29	10,62
Mariotte	12	3	6	12,333	12,000	11,54	11,81
"	24	3	2	24,417	22,167	22,85	23,27
Bossut	1,33	$3\frac{2}{3}$	4	11	7,125	7,26	10,62

Letztrer Versuch ist mit einer kurzen cylindrischen Ansatzröhre gemacht.

Zusatz III. Außer der verticalen Höhe, welche ein Strahl erreicht, kann auch noch die Frage entstehen, wie weit er bey einer gegebnen Lage der Sprungöffnung sprizt, oder wie groß die Sprungweite ist. Setzt man zuerst den einfachsten Fall, daß die Axe der Gußmündung eines Springwerks horizontal liegt, und bezeichnet durch v die mittlere Geschwindigkeit des ausspringenden Strahls im Puncte der größten Zusammenziehung, H die senkrechte Höhe der Mündung über einer Horizontalebene, und durch W die Sprungweite des Strahls auf dieser Ebene: so ist nach §. 102. Zus. III. 2)

$$W = v \cdot \sqrt{\frac{H}{g}} = 0{,}24 \cdot v \cdot \sqrt{H} \text{ Leipziger Fuß,}$$

$$= 0{,}253 \cdot v \cdot \sqrt{H} \text{ Rheinländische Fuß.}$$

Hieraus erhält man für eine Oeffnung in einer dünnen Platte, weil $v = \frac{25}{16} \cdot c$ [§. 130. Zus. III.] ist,

$$W = 0{,}3748 \; c \cdot \sqrt{H} \text{ Leipz. F.} = 0{,}395 \cdot c \sqrt{H} \text{ Rheinl. F.}$$

und nach Zus. II. für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}24 \cdot c \cdot \sqrt{H} \text{ Leipz. F.} = 0{,}253 \cdot c \cdot \sqrt{H} \text{ Rh. F.}$$

Befindet sich an dem Behälter keine Leitröhre, so daß die Sprungöffnung unmittelbar an der Wand des Behälters angebracht ist: so wird, wenn h die Druckhöhe bezeichnet, $c = \alpha \cdot \sqrt{h}$, daher bey der Oeffnung in einer dünnen Wand [§. 130. Zus. VII. 7)]

$$W = 0{,}3748 \cdot 5{,}16 \cdot \sqrt{(h \cdot H)} = 1{,}932 \cdot \sqrt{(h \cdot H)},$$

und bey einer kurzen Ansatzröhre

$$W = 0{,}24 \cdot 6{,}77 \cdot \sqrt{(h \cdot H)} = 1{,}624 \cdot \sqrt{(h \cdot H)},$$

wo diese beyden letzten Ausdrücke für jedes Maß gelten.

Beyspiel. In der verticalen dünnen Wand eines Behälters befindet sich bey 9 Fuß Druckhöhe eine Oeffnung 4,3 Fuß über einer horizontalen Ebene: wie weit wird der Strahl auf derselben springen?

$$W = 1{,}932 \cdot \sqrt{(4{,}3 \cdot 9)} = 12{,}03 \text{ Fuß.}$$

Zusatz IV. In einem Gefäße, dessen Boden mit der Horizontalebene, worauf der Strahl fällt, gleich hoch liegt, befindet sich in einer verticalen Wand desselben eine Oeffnung: so erhält man allgemein [§. 102. Zus. III.]

$$W^2 = \frac{v^2}{g} \cdot H.$$

Aber [§. 130. Zus. VII. 8)] $v^2 = \alpha^2 \sqrt{h}$,

daher die Sprungweite $W = \frac{\alpha}{\sqrt{g}} \cdot \sqrt{(h \cdot H)}$.

Nun sind α, g bestimmte Größen, daher hängt die Sprungweite vom Producte der Höhe h · H ab. Aber H + h ist die ganze Höhe des Wassers über der Ebene, worauf die Sprungweite genommen wird, und es ist daher das Product H · h am größten, wenn h = H ist; folglich spritzt der Strahl auf einer mit dem Boden des Gefäßes gleich liegenden Horizontalebene am weitesten, wenn sich die Ausflußöffnung auf der halben Höhe des Wassers im Gefäße befindet.

Auch folgt, daß bey Oeffnungen in gleicher Entfernung über oder unter der Mitte der Wasserhöhe die Sprungweiten gleich groß sind.

Zusatz V. Wenn die Axe der Sprungöffnung unter einem schiefen Winkel = β gegen den Horizont aufwärts gerichtet ist: so erhält man nach §. 102. Zus. II. 2) allgemein die Sprungweite auf derjenigen Horizontalebene, welche durch die Mitte der Oeffnung geht

$$W = \frac{v^2}{2g} \cdot \sin 2\beta = 0{,}02877 \cdot v^2 \cdot \sin 2\beta \text{ Leipz. Fuß,}$$
$$= 0{,}032 \cdot v^2 \cdot \sin 2\beta \text{ Rheinl. Fuß;}$$

daher für eine Oeffnung in einer dünnen Platte nach Zus. I.

$$W = 0{,}07025 \cdot c^2 \cdot \sin 2\beta \text{ Leipziger Fuß,}$$
$$= 0{,}078125 \cdot c^2 \cdot \sin 2\beta \text{ Rheinl. Fuß,}$$

und für eine kurze Ansatzröhre

$$W = 0{,}02877 \cdot c^2 \cdot \sin 2\beta \text{ Leipz. Fuß,}$$
$$= 0{,}032 \cdot c^2 \cdot \sin 2\beta \text{ Rheinl. Fuß.}$$

Wenn sich die Sprungöffnung unmittelbar in der Wand eines Behälters befindet, so daß die Leitröhre wegfällt: so erhält man, wenn h die Druckhöhe bezeichnet, $c^2 = \alpha^2 \cdot h$, daher für Oeffnungen in einer dünnen Wand

$$W = 0{,}07025 \cdot 26{,}63 \cdot h \cdot \sin 2\beta = 1{,}872 \cdot h \cdot \sin 2\beta,$$

und bey einer kurzen Ansatzröhre

$$W = 0{,}02877 \cdot 45{,}83 \cdot h \cdot \sin 2\beta = 1{,}319 \cdot h \cdot \sin 2\beta,$$

wo beyde letztere Ausdrücke für jedes Maß gelten.

Weil $\sin 2\beta = \sin(180° - 2\beta) = \sin 2(90° - \beta)$, so folgt, daß die Sprungweiten unter übrigens gleichen Umständen einander gleich sind, wenn sich die Neigungswinkel der Axen der Sprungöffnungen gegen den Horizont zu 90° ergänzen.

Auch folgt aus §. 102. Zus. II., daß die größte Sprungweite unter übrigens gleichen Umständen einem Neigungswinkel von 45° entspricht. Ferner, daß die größte Sprung-

weite doppelt so groß ist als die verticale Strahlhöhe, wenn der Strahl gerade aufwärts gerichtet ist, und endlich daß die größte Sprungweite viermal so groß ist als die lothrechte Höhe vom Scheitel des Strahls bis zum Horizont.

Beyspiel I. In der Wand eines Behälters ist eine kurze Ansatzröhre unter einem Winkel von 40° gegen den Horizont geneigt; wie groß wird die Sprungweite auf dem Horizont der Oeffnung seyn, wenn über derselben 36 Fuß Druckwasser steht?

$W = 1{,}319 \cdot 36 \cdot \sin 80° = 46{,}75$ Fuß.

Beyspiel II. Bey dem Gußrohr einer Feuerspritze beträgt die Geschwindigkeit des Wassers in der Mündung 60 Fuß; welche Höhe wird der vertical aufwärts steigende Strahl erreichen, und wie groß wird die größte Sprungweite seyn?

Wenn die Gußröhre als eine kurze Ansatzröhre angesehen wird, so ist nach Zus. II.

$z = 0{,}0143 \cdot 60^2 = 51{,}48$ Fuß,

und die größte Sprungweite $W = 2z$, also $W = 2 \cdot 51{,}48 = 102{,}96$ Fuß.

Fünftes Kapitel.

Vom Stoße oder hydraulischen Druck des Wassers.

§. 148.

Erklärung. Wird eine Fläche von einem fließenden Wasser gestoßen, so läßt sich allemal ein Gewicht angeben, welches mittels eines Fadens über einer Rolle die Fläche nach entgegengesetzter Richtung des strömenden Wassers ziehen kann und solche in Ruhe erhält, oder mit dem fortwährenden Stoße des Wassers, welcher hier als hydraulischer Druck angesehen werden kann, im Gleichgewicht ist. Wenn dieses Gewicht in Pfunden ausgedrückt wird, so sagt man der Wasserstoß betrage eben so viele Pfunde.

§. 149.

Erklärung. In Hinsicht des Körpers, welcher vom Wasser gestoßen wird, unterscheidet man den geraden oder normalen und den schiefen Stoß gegen eine Ebene, außerdem aber noch den Stoß gegen Körper von verschiedentlich geformten Oberflächen, wobey in Beziehung auf das anstoßende Wasser folgende Fälle zu bemerken sind:

1) der Stoß isolirter Strahlen, d. h. wenn der Wasserstrahl von allen Seiten mit freyer Luft umgeben ist, indem er gegen die Fläche stößt.

2) der Stoß in unbegrenztem Wasser, d. h. wo das Wasser zwar in einem Bette eingeschlossen ist, die gestoßne Fläche aber in Bezug auf den Querschnitt des Wassers nur sehr klein ist.

3) der Stoß in begrenztem Wasser oder in Gerinnen, d. h. wenn sich zwischen der gestoßnen Fläche und den Wänden des Canals oder Gerinnes, worin sich das Wasser bewegt, nur ein geringer Zwischenraum befindet.

§. 150.

Aufgabe. Den hydraulischen Druck oder normalen Stoß des Wassers gegen eine unbewegliche ebene Fläche zu finden, vorausgesetzt, daß sämmtliche Wassertheile die Fläche treffen.

Auflösung. Bewegt sich Wasser mit einer Geschwindigkeit c normal gegen eine unbewegliche Fläche, welche man als einen Widerstand ansieht, und die in jeder Secunde gegen die Fläche strömende Wassermenge ist $= M$, das Gewicht von einem Cubikfusse dieses Wassers $= \gamma$: so ist das Gewicht

der in jeder Secunde zuströmenden Wassermenge $= M\gamma$. Denkt man sich nun, daß die stoßende Wassermasse in irgend einer Zeit t die Geschwindigkeit c erlangt habe: so ist das Gewicht der Wassermenge, die in der Zeit t zum Stoße gelangt $= t \cdot M\gamma = N\gamma$. Soll aber die Wassermenge N in der Zeit t die Geschwindigkeit c erlangen, so ist hierzu nach §. 107. Zus. VI. 5) eine Kraft $= P = \frac{c \cdot N\gamma}{2g \cdot t}$ erforderlich, und eben so groß ist nun der Druck, welchen die Masse N gegen eine unbewegliche Fläche ausüben würde. Setzt man daher statt $N\gamma = t \cdot M\gamma$, so findet man den hydraulischen Druck oder Stoß des Wassers gegen eine unbewegliche Fläche $= \frac{c}{2g \cdot t} \cdot t \cdot M\gamma$ oder

$$P = \frac{c}{2g} \cdot M\gamma,$$

vorausgesetzt, daß sämmtliche Wassertheile die Fläche treffen.

Zusatz. Der Stoß des Wassers hängt daher ab

1) von der Wassermenge, welche in jeder Secunde gegen die Fläche stößt, und
2) von der Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser die Fläche trifft.

Bezeichnet man durch f den Flächeninhalt vom Querschnitt des anschlagenden Wassers bey immer gleich bleibender Geschwindigkeit c, und durch h die Fallhöhe, welche der Geschwindigkeit c zugehört: so ist $M = f \cdot c$, und $c^2 = 4gh$ [§. 99. 6)]. Daher der Stoß des Wassers gegen eine unbewegliche Fläche auch $P = \frac{c}{2g} \cdot f \cdot c \cdot \gamma = \frac{c^2}{2g} \cdot f\gamma$, oder auch

$$P = 2h \cdot f\gamma.$$

§. 151.

Aufgabe. Den normalen Stoß des Wassers gegen eine bewegte ebene Fläche zu finden.

Auflösung. Bewegt sich das Wasser mit der Geschwindigkeit c, und die Fläche, deren Inhalt dem Querschnitte f des anstoßenden Wassers gleich ist, mit der Geschwindigkeit v nach eben derselben Richtung, und es ist $c > v$: so kann nicht die gesammte Wassermenge $M = cf$ zum Stoße gelangen, weil, indem die Fläche in einer Secunde um den Weg v weiter geht, das mit der Geschwindigkeit c nachfolgende Wasser $c \cdot f$ um den Weg v zurückbleibt, also nur die Wassermenge $(c - v)\, f$ zum Stoße gelangt. Jedes Wassertheilchen, welches die Ebene erreicht, wirkt mit der Geschwindigkeit $c - v$ [§. 89. Zus. II.] in dieselbe; es ist daher **der normale Stoß des Wassers gegen eine bewegte ebene Fläche oder der relative Stoß** nach vorigem §. Zus.

$$1)\ P = \frac{c-v}{2g} \cdot (c-v)\, f\gamma = \frac{(c-v)^2}{2g} \cdot f\gamma.$$

Könnte man annehmen, daß sämmtliche Wassertheile des Zuflusses M zum Stoße gelangten, welches der Fall wäre, wenn die Fläche f jeden Augenblick durch eine andere ersetzt würde, so daß kein **Wassertheilchen ohne zu stoßen fortfließen könnte**, wie dieß nahe genug bey eingeschaufelten unterschlägigen Wasserrädern der Fall ist: so wäre die in jeder Secunde anschlagende Wassermenge $= M = c \cdot f$. Die Geschwindigkeit, mit welcher jedes Wassertheilchen in die Fläche wirkt, bleibt $c - v$; daher ist unter der obigen Voraussetzung der **relative Stoß**

$$2)\ P = \frac{c-v}{2g} \cdot cf\gamma = \frac{c^2 - cv}{2g} \cdot f \cdot \gamma = \frac{c-v}{2g} \cdot M\gamma.$$

Zusatz I. Stößt ein isolirter Strahl gegen eine unbewegliche Ebene normal, und das Wasser kann sich auf derselben hinlänglich ausbreiten, damit kein Wassertheilchen ohne

zu stoßen abfließen kann: so werden alle Bedingungen, welche dem allgemeinen Ausdrucke §. 150. und dessen Zusatz zum Grunde liegen, erfüllt. Daher lässt sich auch für den Stoß isolirter Strahlen der hydraulische Druck $= P = \frac{c}{2g} \cdot M\gamma = 2h \cdot f\gamma$ annehmen.

Die Versuche der Herren Bossut und Langsdorf bestätigen dieß, woben vorausgesetzt ist, daß der Durchmesser der gestoßnen Fläche wenigstens viermal so groß, als der Durchmesser des isolirten Strahls ist.

Ist hingegen die gestoßne Fläche kleiner, so daß nicht sämmtliches Wasser zum Stoße gelangt: so kann auch die Formel keine Anwendung finden. Aus Hrn. Langsdorf's Versuchen folgt, daß wenn die gestoßne Fläche den Querschnitt des Strahls vor seiner Ausbreitung gleich ist: so wird der Stoß nur halb so groß, wie bey einer hinlänglichen großen Fläche, also $P = \frac{c}{4g} \cdot M\gamma = h \cdot f\gamma$ seyn.

Zusatz II. Setzt man bey dem normalen Stoße des unbegrenzten Wassers gegen eine Ebene den Inhalt derselben $= f$, so ist ebenfalls der Querschnitt des auf die Ebene zuströmenden Wassers $= f$. Weil aber von diesem Wasser nicht alle Theile desselben zum Stoße gelangen, da sich in einer gewissen Entfernung vor der Fläche die Wasserfäden von ihrer vorigen Richtung ablenken: so muß der Stoß geringer als nach den allgemeinen Ausdrücken in §. 150. und dessen Zusatz gefunden werden. Hierzu kommt noch, daß wegen der Wirkung auf das Hintertheil der Fläche ein besondrer Effect entsteht, der nicht in Rechnung gebracht ist. Es bleibt daher nichts übrig, als diejenigen Resultate anzunehmen, welche aus den besten hieher gehörigen Versuchen gezogen sind.

Nach den Versuchen der Herren Bossut, d'Alembert und Condorcet ist der Stoß im unbegrenzten Wasser $= P = hf\gamma = \frac{c^2}{4g} \cdot f\gamma = \frac{c}{4g} \cdot M\gamma$, welches halb so viel als nach §. 150. und dessen Zus.

Zur Bestimmung des relativen Stoßes im unbegrenzten Wasser lassen sich die allgemeinen Ausdrücke in §. 151. mit den erforderlichen Abänderungen anwenden.

Zusatz III. Bey dem Stoße im begrenzten Wasser oder in Gerinnen, wo sich zwischen der gestoßnen Fläche und

den Wänden des Gerinnes, so weit es mit Wasser angefüllt ist, nur ein geringer Zwischenraum befindet, muß nothwendig die Stoßfläche eine gewisse Geschwindigkeit haben, und nebst den Seitenwänden des Gerinnes höher als der Querschnitt des zuströmenden Wassers seyn, wenn alle vor der Stoßfläche anlangenden Wassertheile zum Stoße gelangen sollen.

Herr Bossut folgert aus seinen Versuchen, so weit solche in einem engen Canal angestellt sind, daß der normale Stoß gegen die Schaufeln eines unterschlägigen Wasserrades in einem Schußgerinne beynahe doppelt so groß als die Gewalt ist, welche die Schaufelfläche, eben so tief unter Wasser gesetzt, in einem unbegrenzten Strome leiden würde. Hiernach ist es leicht, den Umständen gemäß von den allgemeinen Ausdrücken im §. 151. Gebrauch zu machen.

§. 152.

Aufgabe. Eine ebene Fläche AB [Fig. 88.*)] sey gegen die Richtung eines einzelnen anstoßenden Wasserfadens EG unter dem Einfallswinkel EGA $= \beta$ geneigt, die Kraft, mit welcher das Wasser eine Ebene BD, welche normal auf der Richtung EG desselben stehet, stößt, sey P; man soll daraus den **Normalstoß** Q, den **Seitenstoß** Q' und den **Parallelstoß** Q'' auf die Ebene AB bestimmen.

Auflösung. Man nehme GE $=$ P, zeichne um GE das Rechtseit GHEI: so ist nach dem Parallelogramm der Kräfte [§. 15. 16.], wenn man sich EG in die rechtwinklichen Seitenkräfte EH und EI $=$ HG zerlegt denkt, dergestalt, daß HG normal auf AB ist, HG $=$ Q. Aber HG $=$ EG $\cdot \sin \beta$. Daher der Normalstoß Q $=$ P $\cdot \sin \beta$.

Die Kraft EH $=$ P $\cdot \cos \beta$, parallel mit der Ebene, kann in Absicht des Stoßes nichts wirken und geht verloren.

Aus der Kraft, welche von dem anstoßenden Wasser als Stoß gegen die Ebene AB verwandt wird, lässt sich durch Zerlegung in die Seitenkräfte sowohl der Seitenstoß Q' nach der Richtung HL normal auf GE, als auch der Parallelstoß Q'' nach der Richtung EG des anstoßenden Wassers finden, wenn um HG das Rectangel HLGK gezeichnet wird. Hiernach wird Q' durch HL = KG, Q'' durch HK = LG vorgestellt, und es ist KG = HG · sin (90° — β) = HG · cos β. Daher der Seitenstoß Q' = P · sin β · cos β. Ferner ist HK = LG = HG · cos (90° — β) = HG · sin β. Daher der Parallelstoß Q'' = P · sin β², wo P nach §. 150. 151. zu bestimmen ist.

Zusatz I. Setzt man, daß die normale Fläche BD die Projection der ganzen schiefen Fläche BA ist, und nimmt an, daß der Querschnitt des anstoßenden Wassers der Projection BD gleich ist: so gelten noch die vorigen Schlüsse, und man hat hiernach den Stoß gegen eine schiefe Ebene nach der Richtung des anstoßenden Wassers oder den Parallelstoß, wenn der normale Stoß auf ihre Projection mit dem Quadrate vom Sinus des Einfallswinkels multiplicirt wird.

Auch folgt hieraus ferner, daß sich die Parallelstöße gegen verschiedne schiefe Ebenen von einerley Projection wie die Quadrate der Sinusse ihrer Einfallswinkel verhalten.

Zusatz II. Wie weit die vorhergehenden allgemeinen Sätze mit der Erfahrung übereinstimmen, kann nur nach richtigen Versuchen ausgemittelt werden. Nach den vortrefflichen Versuchen des Herrn Hofr. Langsdorf stimmt bey dem Stoße isolirter Strahlen die Erfahrung sehr genau mit den Resultaten des vorigen Zusatzes überein. Hingegen bey dem Stoße des unbegrenzten Wassers ist schon deshalb keine Uebereinstimmung zwischen Theorie und der Erfahrung zu erwarten, weil hier nicht alle Wassertheile zum Stoße gelangen, und schon in einer Entfernung von der schiefen Ebene nach mancherley Richtungen abfließen, ohne die Ebene unter einem bestimmten Neigungswinkel zu treffen. Da es hierüber bis jetzt

noch an einer vollständigen Theorie fehlt, so kann man zu Folge der von den Herren Bossut, d'Alembert und Condorcet angestellten Versuche, bis Theorie und Erfahrung hierüber mehr Aufklärung geben, den Parallelstoß des unbegrenzten Wassers

$$Q'' = [\sin\beta^2 + (1 - \sin\beta) \cdot 0,4] P$$

annehmen, wo P nach §. 150. 151. und dessen Zusätzen zu bestimmen ist.

Sechstes Kapitel.

Kurze Betrachtung einiger hydraulischen Maschinen.

§. 153.

Erklärung. Wasserräder heißen alle diejenigen Räder, welche durch den Druck des Wassers [§. 60.] oder durch den Stoß desselben [§. 148.], oder auch durch Druck und Stoß zugleich in Bewegung gesetzt werden. Man gebraucht sie zu Treibung der Mühlen, Wasserhebungswerke und anderer Maschinen.

Dreht sich das Wasserrad in einer verticalen Ebene um seine Axe, so nennt man es ein verticales Wasserrad. Ein Wasserrad, das sich in einer horizontalen Ebene um seine Axe bewegt, heißt ein horizontales. Hier ist nur von erstern die Rede.

Die Art, wie ein verticales Wasserrad zum Umlaufe gebracht wird, ist nicht bey allen Anlagen eine und dieselbe. Entweder fällt das Wasser von oben her auf das Rad, und dreht es vermöge seiner Schwere um; oder es stößt von unten her daran, und bringt das Rad in Bewegung. Im ersten Falle heißt das Rad oberschlägig, im andern unterschlägig. In beyden Fällen dreht sich das Rad

von dem Puncte des Auffallens oder Anstoßens nach der Richtung zu um, in welcher das Wasser herbeyfloß.

§. 154.

Erklärung. Die oberschlägigen **Wasserräder** haben immer zwey sogenannte neben einander parallel stehende Kränze AFBEGD [Tab. VII. Fig. 89.], welche an ihrem innern Umfange DGE mit Bretern beschlagen werden. Dadurch ergibt sich zugleich zwischen beyden Kränzen ein ringförmiger Canal, dessen Boden DGE jene Breter bilden. Dieser Canal wird durch Scheidewände, sogenannte Schaufeln, in viele einzelne Behältnisse oder Zellen eingetheilt. Diese Zellen fangen auf einer Seite das herabfallende Wasser auf, welches eine Zeit lang mit dem Rade wegen der auf dieser Seite entstehenden Ueberwucht sich umwälzen kann, ohne vor Erreichung des tiefsten Punctes ausgeschüttet zu werden.

Jede Schaufel setzt man aus Bretstücken HK, KA unter einem gewissen Winkel zusammen, der entweder ein rechter, oder die Ergänzung des **Dockungswinkels** zu zwey rechten oder sonst ein bestimmter Winkel ist. Der **Dockungswinkel** ist QPR, nämlich der Winkel, welchen der Halbmesser CR mit dem vordern Schaufelstück QP macht. Das an den **Radboden** anstoßende Schaufelstück HK heißt die **Boden-** oder **Riegelschaufel**, das andere KA, dessen Rand in den äußern Umfang des Rades fällt, heißt die **Stoßschaufel**.

Anmerkung. Die vortheilhafteste Anordnung dieser Räder gehört in die Maschinenlehre, und es wird daher hier nur so viel ausgehoben, als zur Bestimmung der Kraft, die von dem Wasser an einem oberschlägigen Rade ausgeübt werden kann, nöthig ist, und als die Grenzen dieses Lehrbuchs gestatten.

§. 155.

Aufgabe. Aus dem gegebnen größern Durchmesser des Rades, der Höhe AB [Fig. 89.], nebst der Kranzbreite AD und der Anzahl Schaufeln, die Schaufelstellung bey dem oberschlägigen Rade anzugeben.

Auflösung. Man theilt die Breite AD des Kranzes in drey gleiche Theile, wovon LD = $\frac{1}{3}$ · AD. Mit dem Halbmesser CL, welchen man den mechanischen nennt, beschreibt man einen Kreis LMN, den Theilkreis oder Theilriß [§. 50.], und theilt diesen (hier in der Zeichnung ist LMN nur die Hälfte des Theilrisses) in so viele gleiche Theile, als das Rad Schaufeln erhalten soll. Zwey solcher Theile mögen LK, KP seyn. Aus dem Mittelpuncte C zieht man durch diese Theilpuncte L, K, P bis an die äußere Kranzperipherie die Halbmesser CA, CQ, CR rc. In den dadurch erhaltnen vierseitigen Figuren AQKL, QRPK zieht man nun die Diagonalen AK, QP rc.: so geben diese die Stellung der Stoßschaufeln. Errichtet man in den Theilpuncten K, P rc. an AK, QP die Normalen KH, PS [Geom. §. 79. Anm.] bis an die innere Kranzperipherie: so erhält man die Stellung der Boden- oder Riegelschaufeln.

Zusatz I. Der hier beschriebnen Schaufelungsmethode bedient man sich mit gutem Erfolge hier in Freyberg bey allen oberschlägigen Wasserrädern. Nur in so fern weicht man etwas davon ab, daß man zuweilen die Zellen, wie z. B. AKHSPQ rc. am äußern Umfange entweder etwas öffnet oder zumacht, je nachdem man viel oder wenig Aufschlagewasser hat, und dabey eine größere oder kleinere Geschwindigkeit als gewöhnlich Statt findet, (z. B. für den gewöhnlichen Gang

eines 20 Ellen hohen oberschlägigen Rades rechnet man bey 100 Cubikfuß Aufschlagewasser in der Minute auf 5 bis höchstens 6 Umgänge in dieser Zeit, und hierzu wählt man die im §. 155. angegebne Schaufelungsmethode). Bey viel Wasser und großer Geschwindigkeit (z. B. 300 Cubikfuß und 6 Umgänge eines 20 Ellen hohen Rades in der Minute) öffnet man nämlich die Zelle, d. h. rückt die Kanten A, Q, R rc. der Stoßschaufeln AK, QP rc. von den Richtungen der Halbmesser CA, CQ rc. von $\frac{1}{4}$ bis höchstens $1\frac{1}{2}$ Zoll ab, so daß die Winkel AKC, QPC rc. sich vergrößern; bey wenig Wasser und kleiner Geschwindigkeit (z. B. 100 Cubikfuß und 3 Umgänge eines 20elligen Rades in der Minute) hingegen macht man die Zelle zu d. h. die Schaufelkanten A, Q, R rc. werden mit Verkleinerung der Winkel AKC, QPC rc. von $\frac{1}{4}$ bis höchstens $1\frac{1}{2}$ Zoll über die radicalen Theilpuncte A, Q rc. vorwärts gelegt, als es nach der eigentlichen oder geraden Theilung (nach der im §. 155. angegebenen Theilung) zu geschehen pflegt.

Uebrigens gibt es noch mehrere Schaufelungsmethoden, welche aber alle hier anzuführen zu weitläufig wären.

Zusatz II. Was die Anzahl der Schaufeln betrifft, so gibt man bey viel Wasser und großer Geschwindigkeit dem Rade viermal, und bey wenigem Wasser und geringer Geschwindigkeit dem Rade sechsmal bis höchstens achtmal so viel Schaufeln, als der große Durchmesser oder die Höhe des Rades Ellen enthält.

Die Weite der Kränze hängt von der Wassermenge, von der Anzahl Umgänge des Rades in einer Minute, und von der Breite des Kranzes, welche gewöhnlich 9 bis 12 Zoll beträgt, ab. Man rechnet hierbey so, als ob der Canal zwischen beyden Kränzen eine viermal größere Wassermenge in sich fassen sollte [§. 151. Zus. I.]. Nennt man nämlich die in jeder Minute auf das Rad fallende Wassermenge = M Cubikfuß, die Anzahl Umgänge in der Minute = n, die Breite des Kranzes = b, die Höhe des Rades = D, die Weite der Kränze von einander = w: so muß seyn $n \cdot w \cdot b\,(D-b)\,\pi = 4M$, also $w = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{M}{n \cdot b\,(D-b)} = 1{,}2724 \cdot \frac{M}{n\,b\,(D-b)}$, wofür man in der Ausübung $w = 1{,}28 \cdot \frac{M}{nb\,(D-b)}$ setzen kann.

Beyspiel. Man hat bey einem 20 Ellen oder 40 Fuß hohen Rade in der Minute 100 Cubikfuß Aufschlagewasser, und das

Rad, dessen Breite 9 Zoll $= \frac{3}{4}$ Fuß beträgt, soll in der Minute 5 Umgänge machen: so muß die Weite der Kränze $= w = 1,28 \cdot \frac{100}{5 \cdot \frac{3}{4} \cdot (40 - \frac{3}{4})} = 1,28 \cdot \frac{100}{5 \cdot 0,75 \cdot 39,25} = 0,87$ Fuß oder $10\frac{1}{2}$ Zoll betragen.

Zusatz III. Bey großen Wasserrädern werden die Kränze mittels acht Hauptarmen und doppelt so viel kleinern oder Helfarmen an einander befestiget. Um aber die Hauptarme an die Welle gehörig anzulegen, so wird entweder die ganze Welle oder nur der mittlere Theil derselben parallelepipedisch geformt.

Anmerkung. Bey Wassergöpeln hat man Wasserräder, welche von dem Wasser bald nach dieser Richtung, bald nach der entgegengesetzten in Bewegung gesetzt werden können, und daher Kehrräder genannt werden. Sie bestehen eigentlich aus zwey Wasserrädern, die in der Mitte einen gemeinschaftlichen Kranz haben. Die Schaufelung ist so eingerichtet, daß in dem einen Rade die Schaufeln denen in dem andern entgegengerichtet sind, und deshalb haben diese Räder auch ein doppeltes Aufschlagegerinne.

§. 156.

Aufgabe. An einem oberschlägigen Wasserrade befindet sich auf der einen Seite des Umfanges zwischen den Kränzen ein wasserhaltender Bogen abed [Fig. 90.], dessen centrische Linie in dem Halbkreis AFB liegt, und bey welchem Bogen alle Querschnitte nach der Richtung des Mittelpunctes C einander gleich sind. Man sucht die Kraft, mit welcher dieser wasserhaltende Bogen abed das Rad umzudrehen strebt.

Auflösung. Denkt man sich über und unter dem horizontalen Querschnitt IH ein verticales Wasserprisma NKLM, welches mit der centrischen Linie DFE des wasserhaltenden Bogens abed einerley Höhe hat: so lässt sich erweisen, daß dieses Prisma eben so auf die Umdrehung des Rades

wirkt, wie der wasserhaltende Bogen. Denn man nehme einen sehr kleinen Bogen QS an, ziehe durch Q und S die Querschnitte OP und RT, und in dem verticalen Prisma MK durch Q und S die zugehörigen horizontalen Querschnitte YW und XV, so sind OPTR und YWVX zwey zusammengehörige Wasserschichten, deren man sich auf diese Art mehrere denken kann. Ist nun QG vertical auf den horizontalen Halbmesser CH, so sind die rechtwinklichen Triangel QUS und CGQ einander ähnlich, und es verhält sich QS : QU = CQ : CG, also CG · QS = CQ · QU = CF · WV. Nun findet man das statische Moment der dünnen Wasserschicht OPTR = CG · QS · OP = CG · QS · IH, und das statische Moment der zugehörigen Wasserschicht YWVX = CF · WV · XV = CF · WV · IH. Es ist aber CG · QS = CF · WV, daher sind die statischen Momente der zusammengehörigen Wasserschichten OPTR und YWVX einander gleich, und weil dieß von allen einzelnen zusammengehörigen Wasserschichten gilt, so ist das statische Moment des wasserhaltenden Bogens abed dem statischen Moment des verticalen Wasserprismas MNKL gleich. Nennt man nun die Höhe des wasserhaltenden Bogens DFE, nämlich UZ = H, den Flächeninhalt des Querschnitts desselben = F, und den Halbmesser der centrischen Linie DFE, nämlich CF = a: so ist das statische Moment des Wasserprisma MNKL = a · F · H · γ, wo γ das Gewicht eines Cubikfusses Wassers bedeutet, und die übrigen Größen ebenfalls in Fußmaß ausgedrückt sind.

Da nun beym oberschlägigen Rade das Wasser nur durch sein Gewicht und nicht durch Fall oder Stoß wirken soll: so muß daher jeder Punct der

centrischen Linie AFB die Geschwindigkeit des in die oberste Zelle einschließenden Wassers haben. Nennt man diese Geschwindigkeit = c, die Menge der Aufschlagewasser in jeder Secunde = M: so muß seyn F · c = M [§. 129. 1)] also F = $\frac{M}{c}$, und daher das statische Moment der Kraft am oberschlägigen Rade = $a \cdot \frac{M}{c} \cdot H \cdot \gamma$, oder die Tangentialkraft am oberschlägigen Rade = $\frac{M}{c} \cdot H \cdot \gamma$.

Zusatz I. Dem oberschlägigen Rade führt man aber die Wasser mittels eines Gerinnes WX [Fig. 89.] so zu, daß die Aufschlagewasser in der ersten, zweyten oder höchstens dritten Schaufel vom höchsten Punct A [Fig. 89.] des Rades an gerechnet einschlagen; woraus sich dann ergibt, weil die Wasser etwa bey der vierten bis sechsten Schaufel, vom tiefsten Punct B an gerechnet, zwischen B und F abfallen, daß die Höhe des wasserhaltenden Bogens oder UZ [Fig. 90.] = H ein gewisser Theil von dem größern Durchmesser oder der Höhe des Rades = D ist, und welchen Theil man daher entweder = $\frac{5}{6} \cdot D$, oder = $\frac{4}{5} \cdot D$ annimmt. Bedeutet $\lambda = \frac{5}{6}$ oder = $\frac{4}{5}$ = 0,8: so ist daher allgemein die Tangentialkraft am oberschlägigen Wasserrade

$$1)\ V = \lambda \cdot D \cdot \frac{M}{c} \cdot \gamma.$$

und das mechanische Moment der Kraft

$$2)\ V \cdot c = \lambda \cdot D \cdot M \cdot \gamma.$$

Beyspiel I. Mittels eines Wassergöpels, dessen oberschlägiges Kehrrad [§. 155. Anmerk.] 18 Ellen oder 36 Fuß hoch ist, sollen 40 Tonnen in einer sechsstündigen Schicht aus 80 Lachter oder 560 Fuß Teife gefördert werden. Die Stillstandszeit beym Anschlagen jeder Tonne rechnet man 3 Minuten oder 180 Secunden; das Gewicht eines Cubikfusses Aufschlagewasser 50 Pfund, und die gesammten auf den Korb reducirten mittlern Widerstände = Q = 2000 Pfund. Man fragt: wie viel Cubikfuß Aufschlagewasser sind unter diesen Umständen in jeder Secunde nöthig?

Auflösung. Jede Tonne braucht Zeit = $\frac{6 \cdot 60 \cdot 60}{40}$ = $\frac{21600}{40}$ = 540 Secunden, incl. Stillstandszeit. Daher die

Aufförderungszeit jeder Tonne $= 540'' - 180'' = 360''$, und die Geschwindigkeit der Tonne $= v = \frac{560'}{360''} = 1{,}55$ Fuß.

Da nun bey einem gleichförmigen Beharrungszustand der Maschine das mechanische Moment der Kraft gleich dem mechanischen Moment der Last ist [§. 121. Zus. IV.]: so muß, wenn man hier das mechanische Moment der Kraft $= \lambda \cdot D \cdot M \cdot \gamma = \frac{5}{6} \cdot D \cdot M \cdot \gamma$ setzt, seyn, $\frac{5}{6} \cdot D \cdot M \cdot \gamma = Q \cdot v$, und daher $M = \frac{Q \cdot v}{\frac{5}{6} \cdot D \cdot \gamma} = \frac{2000 \cdot 1{,}55}{\frac{5}{6} \cdot 36 \cdot 50} = 2{,}06$ Cubikfuß, d. h. man braucht in jeder Zeitsecunde 2,06 Cubikfuß Wasser, oder in einer Minute $= 60 \cdot 2{,}06 = 123{,}6$ oder 124 Cubikfuß Aufschlagewasser.

Beyspiel II. Bey einem Pochwerke sey das Gewicht eines armirten Pochstempels $= P = 180$ Pfund; das Pochwerk habe zwey dreystemplige Sätze, und sey dreyhübig [§. 54.] vorgerichtet. Der Hub der Stempel sey $= h = 16$ Zolle, die Höhe des zum Pochwerk gehörigen oberschlägigen Wasserrades sey $= D = 10$ Ellen oder 20 Fuß, das Gewicht des Rades nebst armirten Welle $= G = 100$ Centner, der Halbmesser der Wellzapfen sey $= \varrho = 2$ Zoll, und jeder Stempel soll in der Minute 36 Mal gehoben werden. Wie viel Cubikfuß Aufschlagewasser sind bey einem gleichförmigen Beharrungszustand für diese Maschine in der Minute erforderlich, wenn in jedem Satze immer zwey Stempel arbeiten?

Auflösung. Nach §. 55.2) ist für diesem Fall der mechanische Halbmesser der Welle $= a = 0{,}24 \cdot n \cdot h = 0{,}24 \cdot 3 \cdot 16 = 11{,}52$ Zoll.

Da hier nun in jedem Satze immer 2 Stempel, also in zwey Sätzen 4 Stempel in Thätigkeit seyn müssen [§. 55. Zus. I.]: so ist nach §. 55. Zus. IV. die gesammte auf den mechanischen Wellkreis reducirte Last, nämlich

$$Q = \tfrac{9}{8} \cdot M \cdot P + \varphi \cdot \tfrac{\varrho}{a} \cdot (G + M \cdot P)$$
$$= \tfrac{9}{8} \cdot 4 \cdot 180 + 0{,}15 \cdot \tfrac{2}{11{,}52} (11000 + 4 \cdot 180)$$
$$= 810 + 308 = 1118 \text{ Pfund.}$$

Weil ferner jeder Stempel in der Minute 36 Mal gehoben werden soll, und die Hübigkeit der Welle 3 ist, d. h. jeder Stempel bey einem Umgange des Rades dreymal gehoben wird: so muß daher das Rad in jeder Minute $= \frac{36}{3} = 12$ Mal umgehen, und es ist daher die Geschwindigkeit des Lastpunctes $= v = \frac{12 \cdot 2a \cdot \pi}{60} = \frac{12 \cdot 2 \cdot 11{,}52 \cdot 3{,}141}{60 \cdot 12} = 1{,}2$ Fuß.

Für den Beharrungszustand muß nun das mechanische Lastmoment dem mechanischen Kraftmoment gleich seyn [§. 121. Zus. IV.]; daher ist, nach vorigem Beyspiel angenommen, die Menge Aufschlagewasser in einer Secunde $= M' = \frac{6 \cdot Q \cdot v}{5 \cdot D \cdot \gamma} = \frac{6 \cdot 1118 \cdot 1,2}{5 \cdot 20 \cdot 50} = 1,61$ Cubikfuß, und man braucht daher bey diesem Gange des Pochwerks in jeder Minute $= 60 \cdot 1,61 = 96,6$ oder 97 Cubikfuß Aufschlagewasser.

Zusatz II. Ist M die Menge Aufschlagewasser in einer Secunde, m'' die Anzahl Umgänge des Rades in einer Minute, m die Anzahl Schaufeln des Rades, und m' die Anzahl der mit Wasser stets vollgefüllten Schaufeln: so ist die Zeit eines Umganges des Rades $= \frac{60}{m''}$ Secunden, und in dieser Zeit laufen $= \frac{60}{m''} \cdot M$ Cubikfuß Wasser über das Rad. Folglich ist das Gewicht der Wassermasse, welche immerfort als bewegende Kraft auf die Umdrehung des Rades wirkt $= p = \frac{60}{m''} \cdot \frac{m'}{m} \cdot M \cdot \gamma$ Pfund.

Ist z. B. $M = 2,17$ Cubikfuß, die Anzahl Umgänge des Rades in der Minute oder $m'' = 12$, die Anzahl der Schaufeln des Rades $= m = 40$, und die Zahl der stets mit Wasser voll gefüllten Schaufeln $= 11$: so ist $p = \frac{60}{12} \cdot \frac{11}{40} \cdot 2,17 \cdot 50 = 149$ Pfund.

Anmerkung I. Nennt man bey der in §. 155. angegebnen Schaufelungsmethode den Centriwinkel, welcher zwey nächsten Theilpuncten im Theilriß zugehört, wie z. B. den Winkel QCR [Fig. 89.] $= \beta$, und den Dockungswinkel [§. 154.] QPR $= \alpha$: so findet man aus diesen beyden Winkeln die Nte Stoßschaufel, welche mit dem horizontalen Halbmesser CF eine parallele Lage hat, also auch horizontal liegt, durch folgenden Ausdruck, nämlich $N = \frac{\alpha}{\beta}$, wo α aus der Anzahl der Schaufeln des Rades, der Cowinkel des Dockungswinkels zu 180° hingegen (d. i. z. B. der Winkel CPQ $= 180° - \alpha$) aus dem Halbmesser des Rades CQ, dem Halbmesser des Theilrisses CP nebst dem eingeschloßnen Centriwinkel QCP $= \beta$ nach Geom. §. 256. gefunden wird.

Weiß man die oberste Zelle, in welcher das Aufschlagewasser einfällt: so dient der Ausdruck $N = \frac{\alpha}{\beta}$ dazu, um die Höhe des wasserhaltigen Bogens beym oberschlägigen Rade zu bestimmen.

Auf gleiche Weise lässt sich die Zahl N auch bey andern Schaufelungsmethoden bestimmen.

Anmerkung II. Oben in §. 55. wurde bey Bestimmung des mechanischen Halbmessers der Heblingswelle eines Pochwerks der Fall angenommen, daß von den Stempeln eines Satzes immer nur ein Stempel ruhen sollte. Sollten hingegen von der Anzahl Stempel eines Satzes, oder sonst von der Anzahl Stempel eines Poch- oder Stampfwerks, mehrere Stempel ruhen, und heißen überhaupt die Anzahl Stempel eines Satzes wie oben $= m$, die Anzahl der im Satze jedesmal ruhenden Stempel $= m'$, also $= m - m'$ die Anzahl der immerfort arbeitenden Stempel eines Satzes, und alle übrige obige Bezeichnungen in §. 55. werden beybehalten: so ist allgemein der mechanische Halbmesser der Heblingswelle

$$1)\ a = \frac{m \cdot n}{2(m - m')\pi} \cdot h = 0{,}1591 \cdot \frac{m}{m - m'} \cdot nh,$$

wofür man in der Ausübung für $a = 0{,}16 \cdot \frac{m}{m - m'} \cdot nh = \frac{4}{25} \cdot \frac{m}{m - m'} \cdot nh$ oder auch $a = \frac{1}{6} \cdot \frac{m}{m - m'} \cdot nh$ setzen kann.

Wäre m eine gerade Zahl, und man nähme $m' = \frac{m}{2}$: so wäre $m - m' = \frac{m}{2}$, und daher

$$2)\ a = \frac{m \cdot n}{m \cdot \pi} \cdot h = \frac{1}{\pi} \cdot n \cdot h$$
$$= 0{,}3183 \cdot n \cdot h,$$

wofür man wieder in der Ausübung für $a = 0{,}32 \cdot n \cdot h = \frac{8}{25} \cdot nh$ oder $a = \frac{1}{3} \cdot n \cdot h$ setzen kann.

§. 157.

Aufgabe. Ein oberschlägiges Wasserrad vom Durchmesser AB = D [Fig. 89.] macht in der Minute n Umgänge, und die Wasser zu seinem Betriebe werden in einem horizontalen Gerinne WX herbeygeführt: man fragt, wie hoch der Wasserspiegel UV über den höchsten Punct A des Rades liegen müsse, damit die Geschwindigkeit des durch das Schlundloch T ausströmenden Wassers der Umfangsgeschwindigkeit des Rades gleich werde.

Auflösung. Wenn das Rad in jeder Minute n Umgänge macht, so ist seine Umfangsgeschwin-

digkeit $= c = \frac{n \cdot D \cdot \pi}{60}$, wo D in Fussen gegeben seyn muß.

Nach §. 130. Zus. VII. 4) ist für schmale Gerinne die Geschwindigkeit des durch eine Schutzöffnung fließenden Wassers, d. i. $c = 7,13 \cdot \sqrt{h}$ Leipz. Fuß $= \alpha\sqrt{h}$, und man hat daher $\alpha\sqrt{h} = \frac{n \cdot D\pi}{60}$, oder $h = AV = \left(\frac{n \cdot D\pi}{60 \cdot \alpha}\right)^2 = \left(\frac{3,141}{60 \cdot 7,13}\right)^2 \cdot (n \cdot D)^2 = 0,00005393 \cdot (n \cdot D)^2 = \beta \cdot (n \cdot D)^2$.

Beyspiel. Ein 20 Ellen oder 40 Fuß hohes Rad soll 5 Umgänge in der Minute machen, so muß $AV = h = 0,00005395 \cdot (5 \cdot 40)^2 = 2,157$ Fuß seyn.

Rechnet man die Bodenstärke des Gerinnes 2 Zoll, und Spielraum zwischen Rad und Boden auch 2 Zoll: so muß das Wasser im Gerinne $= 2,157 - 0,333 = 1,824$ Fuß hoch stehen.

Um diese Höhe des Wassers in dem Aufschlagegerinne UX [Fig. 89.] zu erhalten, so bedient man sich deshalb der sogenannten Spannschützen.

Anmerkung. Nach Leipz. Fußmaß ist $\log \beta = 0,73182 - 5$.

§. 158.

Erklärung. Das unterschlägige Wasserrad hat entweder einen Kranz, auf dessen Stirne die breiten Schaufeln befestiget sind, und heißt dann ein Strauberad; oder es hat zwey Kränze, zwischen denen die Schaufeln befestiget werden, und dann nennt man es ein Staberad.

Zu der Bewegung dieser Räder gehört immer eine gewisse Wassermenge, ein Ueberfluß von Wasser aber ist nicht zuträglich. Stets muß der Ueberfluß des Wassers auch unterhalb des Rades sich

ordentlich verlaufen können. Wenn aber das Wasser gegen die Schaufeln des Rades zurücktritt, so wird der Gang des Rades aufgehalten, und wohl ganz gestört. Sollte dieser Fall öfters zu besorgen seyn, so muß man der Welle des Rades eine bewegliche Unterlage geben, um bey einem entstehenden Ueberfluß des Wassers diese Unterlage sammt der Welle, dem Wasserrade und dem übrigen mit der Welle verbundnen Räderwerke [§. 153.] in die Höhe winden zu können. Solche Wasserräder nennt man dann **Pansterräder.**

Die Pansterräder erhalten eine beträchtliche Breite; noch breitere Räder als diese, die oft sechs und mehrere Ellen breit sind, sind unter dem Namen der **Schiffmühlenräder** bekannt.

Diejenigen unterschlägigen Wasserräder, die in einem zugerundeten, der Krümmung des Rades immer näher kommenden Gerinne laufen, heißen **Kropfräder** [Fig. 92.]. Das Gerinne heißt ein **gekröpftes Gerinne** oder **Kropfgerinne**; ist das Gerinne ein gewöhnliches schräg herunter laufendes, so nennt man es ein **gerades** oder ein **Schnurgerinne** [Fig. 91.].

Räder, bey welchen das Wasser entweder etwas über oder unter dem Mittel des Rades einfällt, nennt man **halboberschlägige** oder **mittelschlägige Räder.**

§. 159.

Erklärung. In Absicht der verschiednen Benennungen, welche Bezug auf das Wasser bey den unterschlägigen Gerinnen haben, hat man nachstehendes zu merken:

AA' [Fig. 91. 92.] ist der **Wasserspiegel** des **Oberwassers;**
EE' der **Wasserspiegel** des **Unterwassers;**
FE der verticale Abstand des Oberwasserspiegels vom Unterwasser, das ganze Gefälle;
AD die Höhe des Oberwassers vor dem Schutzbrete, das Druckwasser;
DB die Höhe der Schutzöffnung;
AB Druckwasser und Schutzöffnung zusammen, der **Wasserstand.**

Bey den geraden Gerinnen [Fig. 91.] ist, wenn man aus dem Mittelpuncte C des Rades die Linie CK normal auf den Boden des Gerinnes zieht, und der Punct G die Mitte der eingetauchten Schaufel bezeichnet,

FH oder die verticale Entfernung des Oberwasserspiegels von der Mitte der eingetauchten Schaufel, die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers. Den Abhang des Abschußbodens nennt man das lebendige Gefälle.

Wird bey Kropfgerinnen [Fig. 92.] von der Mitte G der am Anfange des Kropfs bey K stehenden Schaufel die Horizontallinie GH gezogen: so nennt man hier

FH oder die verticale Entfernung des Oberwasserspiegels vom Mittel der am Anfange des Kropfs befindlichen Schaufel, die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers.

Zieht man vom Mittelpuncte des Rades C bis ans Ende des Kropfs bey L die Linie CL, und nimmt auf dieser Linie die Mitte von dem abfließenden Wasser in M, zieht die Verticallinie MN bis an die Horizontallinie GH, so heißt

MN oder der verticale Abstand von der Mitte beyder eingetauchten Theile der am Anfange und Ende des Kropfs befindlichen Schaufeln, die Höhe des wasserhaltenden Bogens.

§. 160.

Aufgabe. Aus der gegebnen Höhe, der Anzahl Schaufeln und Breite des Kranzes die Schaufelstellung beym unterschlägigen Wasserrade anzugeben.

Auflösung. 1) Hängt das Rad in einem geraden Gerinne [Fig. 91.], so ziehe man im Mittel der Kranzbreite den Theilriß, und theile diesen in so viele gleiche Theile, als das Rad Schaufeln erhalten soll. Durch die Theilpuncte z. B. L, M ꝛc. ziehe man Halbmesser, und trage an den Puncten N, P ꝛc., wo die Halbmesser den innern Kreis des Kranzes schneiden, einen Winkel von 15 bis 30 Grad: so geben die Schenkel der Winkel, nämlich hier NO, PQ ꝛc. die Stellung der Schaufeln.

2) Bey einem Kropfgerinne mit beträchtlichem Gefälle oder bey einem mittelschlägigen Rade [§. 158.], theilt man den Theilriß, welcher ebenfalls in die Mitte der Kranzbreite gelegt wird, in so viele gleiche Theile, als das Rad Schaufeln erhalten soll, und zieht durch die Theilpuncte z. B. P, Q ꝛc. [Fig. 92.] Halbmesser bis an den äußern Kreis des Kranzes. Weil nun beym Kropfrade die Schaufeln wie beym oberschlägigen Rade gebrochen werden, so zieht man in den äußern Vierseiten Diagonalen SP ꝛc., setzt auf diese in P eine rechtwinkliche Linie PR, welche den innern Kreis des Kranzes schneidet: so ist SPR die Figur einer

Schaufel im Kropfrade. Inzwischen hat die Erfahrung gelehrt, daß man auch den Winkel SPR = 120 Grade machen kann, ohne eben einen merklich nachtheiligen Einfluß davon auf die Erzeugung der Kraft zu veranlassen.

Den Schaufeltheil SP nennt man hier auch die **Stoßschaufel**, so wie PR die **Riegelschaufel**.

Zusatz I. Außer den hier angegebnen beyden Schaufelungsmethoden für die beyden Arten der unterschlägigen Wasserräder gibt es ebenfalls noch mehrere; der beyden hier angegebnen bedient man sich aber ebenfalls vorzüglich hier in Freyberg, und der Methode 2) hat man sich namentlich bey den jetzt neu erbauten beyden Kropfrädern der Kunstgezeuge bey der Grube Beyhilfe Erbstolln an der Halsbrücke bedient.

Für die Entfernung der Schaufeln, d. i. für die Länge des Bogens LM [Fig. 91.] oder PQ [Fig. 92.] nimmt man bey den im §. 160. beschriebnen Schaufelungsmethoden $1\frac{1}{2}$ Fuß oder 18 Zoll, woraus sich sodann, wenn die Höhe des Rades bekannt ist, die Anzahl der Schaufeln ergibt.

Die Breite einer Schaufel beträgt 10 bis höchstens 18 Zoll. Denkt man sich die Stoßfläche der Schaufel als ein Rechteck, so bekommt man die Länge derselben oder die Weite des Rades im Lichten, wenn man die in einer Secunde durch das Schußgerinne abfließende Wassermenge durch das Product aus der Geschwindigkeit des Mittelpunctes einer Schaufel und der festgesetzten Breite der Schaufel dividirt.

Bey schmalen Kränzen oder bey einer starken Kröpfung ist es nützlich, die Riegelschaufeln so breit zu machen, daß sie noch etwas über den innern Rand der Kränze vorspringen, damit das einstürzende Wasser nicht überschlägt; daher man bey der Berechnung der Länge der Schaufeln eine sehr breite Schaufel, aber auch die Wassermenge wenigstens anderthalbmal so viel, als sie eigentlich beträgt, dabey annimmt.

Zusatz II. Die Kränze verbindet man bey unterschlägigen Wasserrädern ebenfalls durch sogenannte Arme. Bey gewöhnlichen, nicht zu hohen Stabmühlenrädern, wird die cylindrische Welle gewöhnlich dreymal ganz durchlocht, so daß drey starke parallelepipedische Hölzer sich durchstecken lassen.

Diese drey Hölzer sind in ihrer Mitte so eingeschnitten, daß sie daselbst in einander fallen. Sie bilden dann sechs Arme, die einem sechsstrahligen Stern gleichen, weshalb die Werkleute auch sagen: **das Rad laufe auf dem Stern,** zum Unterschiede von jenen, wo die Welle von den Armen umschlossen wird, und wo es heißt, **daß das Rad auf dem Sattel laufe.** Die an den Enden der Radarme angeschnittnen Hacken und Kämme passen in die Vertiefungen, welche sich zu dem Behufe in den Felgen oder Radscheidern befinden.

Bey sehr hohen Staberädern verbindet man den Kranz auf dieselbe Weise wie beym oberschlägigen Wasserrade [§. 155. Zus. III.].

Zusatz III. Damit das anstoßende Wasser die Schaufeln mit einer größern Geschwindigkeit treffe, und nach Gefallen mehr oder weniger abgelassen werden kann, bringt man oberhalb der Räder im Gerinne ein Schützbret AD [Fig. 91. 92.] an, welches so nahe wie möglich ans Rad kommen muß. Es bewegt sich in den Nuten der Griessäulen vertical oder schräg, so wie es den Umständen zusagt; nämlich um die Schützöffnung näher an das Rad zu bringen, gibt man dem Schützbret eine gegen den Horizont geneigte und vom Rade oben abwärts gekehrte Lage, und lässt es zwischen zwey Wangenbretern, die auf beyden Seiten des Gerinnes nach der Richtung des Schützbretes befestiget sind, sich bewegen.

§. 161.

Aufgabe. Die Kraft am unterschlägigen Wasserrade zu finden, mit welcher das Wasser die Schaufeln des Rades nach der Richtung der Tangente fortbewegt, wenn man den Mittelpunct des Stoßes im Schwerpunct des eingetauchten Theils der Schaufel annimmt.

Auflösung. Es bezeichne

P die zu suchende Tangentialkraft,

M die in jeder Secunde anschlagende Wassermenge, die aber wegen des Spielraums zwischen Rad und Gerinne allemal etwas geringer ist, als die

Wassermenge, welche durch die Schützöffnung fließt.

f den Flächeninhalt von dem rechtwinklich auf die Richtung des Wassers eingetauchten Theile der Schaufel,

c die mittlere Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers, und

v die Geschwindigkeit des Schwerpunctes des eingetauchten Theils der Schaufel:

so ist anzunehmen, daß bey denjenigen unterschlägigen Wasserrädern, wo die Schaufeln hinlänglich hoch sind, und nicht zu weit von einander abstehen, sämmtliches Wasser zum Stoße gelange, weil nur ein unbeträchtlicher Theil davon, der die äußersten Enden der tiefsten Schaufeln nicht trifft, ohne zu stoßen abfließen wird. In diesem Falle kann daher die Wassermenge $M = c \cdot f$ so angesehen werden, als wenn sie mit der Geschwindigkeit $c - v$ gegen die Schaufeln anschlägt, weshalb der relative Stoß nach §. 151.2) in Rechnung kommt. Hiernach ist für **unterschlägige Wasserräder im geschloßnen geraden Gerinne**

$$1)\ P = \frac{c-v}{2g} \cdot M\gamma = \frac{(c-v) \cdot c}{2g} \cdot f\gamma.$$

Setzt man, daß h und h' die den Geschwindigkeiten c und v zugehörigen Höhen sind, so ist $c = 2\sqrt{(gh)}$, und $v = 2\sqrt{(g \cdot h')}$, also $c^2 = 4gh$, $v^2 = 4gh'$. Daher auch

$$P = 2[h - \sqrt{(hh')}] \cdot f\gamma.$$

Für Schiffmühlenräder im offnen Strome ist nach §. 151. Zus. II. die Kraft

$$2)\ P = \frac{c-v}{4g} \cdot M\gamma = \frac{(c-v)c}{4g} \cdot f\gamma$$

$$= [h - \sqrt{(hh')}] \cdot f\gamma.$$

Hat das Gerinne einen Kropf, und es ist MN [Fig. 92.] die Höhe des wasserhaltenden Bogens [§. 159.], und MN = d, so kommt mit Beybehaltung der angenommenen Bezeichnung außer dem Stoße gegen die Schaufeln am Anfange des Kropfes noch der Druck des Wassers hinzu, welches sich im wasserhaltenden Bogen befindet. Dieser Druck ist so groß als eine Wassersäule = f · d · γ [§. 60. Zus. I.]. Da aber die Schaufeln mit der Geschwindigkeit v ausweichen, welche zugleich die Geschwindigkeit des abfließenden Wassers ist, so ist M = f · v, also der Querschnitt der drückenden Wassersäule oder $f = \frac{M}{v}$, und daher der Druck auf die eingetauchte Schaufel $= d \cdot \frac{M}{v} \cdot \gamma$. Hiernach die Kraft am Kropfrade

$$3)\ P = \left(\frac{c-v}{2g} + \frac{d}{v}\right) \cdot M \cdot \gamma$$

$$= 2\left[h - \sqrt{(hh')} + \frac{d}{2} \cdot \sqrt{\frac{h}{h'}}\right] \cdot f\gamma.$$

Zusatz I. Für Räder im geraden Gerinne erhält man das mechanische Moment der Kraft $Pv = \frac{cv - v^2}{2g} \cdot M\gamma$.

Dieses Moment wird am größten, wenn $v = \frac{c}{2}$ ist, d. h. die Geschwindigkeit der Schaufeln muß halb so groß, als die Geschwindigkeit des Wassers seyn, wenn das mechanische Moment der Kraft am größten werden soll. Also das größte mechanische Moment der Kraft des unterschlägigen Wasserrades im geraden Gerinne

$$1)\ Pv = \frac{c^2}{2 \cdot 4g} \cdot M\gamma = \tfrac{1}{2}h \cdot M\gamma.$$

Für Schiffmühlenräder im offnen Strome ist das mechanische Moment der Kraft $Pv = \frac{cv - v^2}{4g} \cdot M\gamma$, und daher das größte mechanische Moment der Kraft des Schiffmühlenrades im offnen Strome

$$2)\ Pv = \frac{c^2}{4 \cdot 4g} \cdot M\gamma = \tfrac{1}{4}h \cdot M\gamma.$$

Für Räder im Kropfgerinne ist das mechanische Moment der Kraft $Pv = \left(\frac{cv - v^2}{2g} + d\right) \cdot M\gamma$, und daher das

größte mechanische Moment der Kraft des Kropfrades

$$3)\ Pv = \left(\frac{c^2}{2 \cdot 4g} + d\right) \cdot M\gamma = (\tfrac{1}{2}h + d)\, M\gamma,$$

wo h die verticale Höhe von der Oberfläche des Oberwassers an der Schutzöffnung bis zum Schwerpunct der obersten eingetauchten Schaufel bedeutet.

Zusatz II. Um die Effecte des Rades im geraden Gerinne und des Rades im Kropfgerinne mit einander zu vergleichen, so setze man, daß beyde Räder einerley ganzes Gefälle [§. 159.] $= H$ und Wassermenge $= M$ haben: so ist $H = h + d$, daher $\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}d = \tfrac{1}{2}h + \tfrac{1}{2}d + \tfrac{1}{2}d = \tfrac{1}{2}h + d$, und man erhält das mechanische Moment der Kraft beym Rade im geraden Gerinne

$$Pv = \tfrac{1}{2} \cdot H \cdot M\gamma \text{ [Zus. I.1)]},$$

und beym Rade im Kropfgerinne

$$Pv = (\tfrac{1}{2}H + \tfrac{1}{2}d) \cdot M\gamma \text{ [Zus. I.3)]},$$

wo offenbar der letzte Effect größer als der erste ist, und es folgt daraus, daß Räder im Kropfgerinne, wenn sonst das Gefälle zureicht, unter übrigens gleichen Umständen weit vortheilhafter, als im geraden Gerinne sind; weshalb auch die Müller, wo es nur thunlich ist, bey ihren Gerinnen gerne Kröpfe anbringen, obgleich der Bau theurer ist.

Anmerkung. Wäre bey einem oberschlägigen Wasserrade die Geschwindigkeit des Rades kleiner als die Geschwindigkeit des einfallenden Wassers, und man wollte in diesem Falle den Stoß mit in Rechnung bringen, so gilt in diesem Falle für die Tangentialkraft der Ausdruck §. 161.3), nämlich $P = \left(\frac{d}{v} + \frac{c - v}{2g}\right) \cdot M\gamma$. Oder setzt man statt $d = \lambda \cdot D$, wo D die Höhe des oberschlägigen Wasserrades [§. 156. Zus. I.] bedeutet, so ist auch

$$1)\ P = \left(\frac{\lambda \cdot D}{v} + \frac{c - v}{2g}\right) \cdot M\gamma.$$

Für $c = v$ wird $c - v = 0$, also in diesem Falle die Tangentialkraft $P = \frac{\lambda \cdot D}{v} \cdot M\gamma$ [§. 156. Zus. I.1)].

Der vorhin angegebne Ausdruck 1) gibt das mechanische Moment

$$2)\ Pv = \left[\lambda \cdot D + \frac{cv - v^2}{2g}\right] M\gamma,$$

welches für $v = \frac{c}{2}$ am größten wird [§. 161. Zus. I.].

§. 162.

Aufgabe. Ein unterschlägiges Wasserrad soll in der Minute n Umgänge machen, die Wasser zu seinem Betriebe werden in einem horizontalen Gerinne herbeygeführt: man fragt, wie groß die Geschwindigkeitshöhe FH [Fig. 91. 92.] seyn müsse, wenn die Entfernung CG des Schwerpunctes der eingetauchten Schaufel vom Mittelpuncte C = R Fuß beträgt.

Auflösung. Die Geschwindigkeitshöhe FH findet man, wenn man statt 2R = D setzt, nach §. 157. Da aber beym unterschlägigen Rade die Geschwindigkeit des anschlagenden Wassers doppelt so groß als die Geschwindigkeit des Schwerpunctes der eingetauchten Schaufel seyn muß [§.161. Zus. I.], und nach §. 96. und 99. die Geschwindigkeitshöhen wie die Quadrate der Geschwindigkeiten sich verhalten: so ist demnach die verlangte Geschwindigkeitshöhe FH =

$$h = 4\beta \cdot (n \cdot D)^2 = \delta \cdot (n \cdot R)^2$$
$$= 0{,}00086288 \cdot (n \cdot R)^2 \text{ leipz. Fuß.}$$

Anmerkung. Nach Leipz. Fußmaß ist $\log \delta = 0{,}93594 - 4$.

Beyspiel. Ein unterschlägiges Wasserrad soll in einer Minute 6 Umgänge machen, und die Entfernung des Schwerpunctes der eingetauchten Schaufel vom Mittelpuncte des Rades betrage 12 Fuß: so müßte die Geschwindigkeitshöhe $h = 0{,}00086288 \cdot (6 \cdot 12)^2 = 4{,}476$ Fuß seyn.

Sollte nun mit diesem Rade eine Last gewältiget werden, und die auf den Schwerpunct der Schaufel reducirten Widerstände betrügen = Q = 200 Pfund, so wäre, weil die Geschwindigkeit des Schwerpunctes der Schaufel $= v = \frac{6 \cdot 24 \cdot 3{,}141}{60} = 7{,}54$ Fuß ist, und das mechanische Moment der Last im Beharrungszustande $= Pv = Qv$ seyn muß: so wäre bey dem vortheilhaftesten Gange der Maschine und bey einem geraden Gerinne

$$\tfrac{1}{2} \cdot h \cdot M\gamma = Q \cdot v,$$

und daher die Menge der Aufschlagewasser in jeder Secunde, d. i

$$M = \frac{2 \cdot Q \cdot v}{h \cdot \gamma} = \frac{2 \cdot 200 \cdot 7{,}54}{4{,}476 \cdot 50} =$$

13,48 Cubikfuß, oder in jeder Minute $= 60 \cdot 13{,}48 =$ 798,8 Cubikfuß Wasser.

Hätte man z. B. 7 Fuß Gefälle, so würde man ein Kropfrad anlegen, wo sodann die Höhe des wasserhaltenden Bogens $= d = 7{,}000 - 4{,}476 = 2{,}524$ Fuß betrüge. Dann wäre, weil $(\frac{1}{2}h + d) \cdot M\gamma = Q \cdot v$ seyn muß, die Menge der Aufschlagewasser in jeder Secunde $= M =$

$$\frac{Q \cdot v}{(\frac{1}{2}h + d)\gamma} = \frac{200 \cdot 7{,}54}{(2{,}238 + 2{,}524) \cdot 50} = 6{,}336$$ Cubikfuß, oder in jeder Minute $= 60 \cdot 6{,}336 = 370{,}16$ Cubikfuß.

Zusatz I. Wäre der Wasserstand gegeben, und sey die Höhe desselben bis zum Mittelpunct der Schützöffnung DB [Fig. 92.] gerechnet, $= h'$: so ist die Geschwindigkeit des an der Schützöffnung ausströmenden Wassers $= c' = 7{,}13 \cdot \sqrt{h'}$ Leipz. Fuß. Damit aber das anschlagende Wasser die doppelte Geschwindigkeit des Schwerpunctes der eingetauchten Schaufel $= 2v = c''$ erhalte: so ist außer der schon vorhandnen Höhe h' noch eine Höhe $= h'' = \frac{c''^2 - c'^2}{4g}$, oder nach §. 130. Zus. VII. 4) die Höhe $= h'' = 0{,}0197 \cdot (c''^2 - c'^2) = 0{,}0197 \cdot (c'' + c') \cdot (c'' - c')$ erforderlich. Demnach die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers $= h = h' + h''$.

Beyspiel. Außer den im letzten Beyspiele angegebnen Größen sey der Wasserstand über dem Mittelpunct der Schützöffnung, nämlich $h' = 1\frac{1}{2}$ Fuß: so ist die Geschwindigkeit des an der Schützöffnung ausströmenden Wassers $= c' = 7{,}13 \cdot \sqrt{1{,}5} = 8{,}73$ Fuß. Da nun die Geschwindigkeit des an die Schaufeln anschlagenden Wassers doppelt so groß als die Geschwindigkeit der Schaufeln, d. i. $c'' = 2v = 2 \cdot 7{,}54 = 15{,}08$ Fuß seyn muß: so hat man außer obiger Höhe $h' = 1{,}5$ Fuß noch eine Höhe $h'' = 0{,}0197 \cdot (15{,}08 + 8{,}73) \cdot (15{,}08 - 8{,}73) = 0{,}0197 \cdot 23{,}81 \cdot 6{,}35 = 2{,}978$ Fuß nöthig. Demnach die Geschwindigkeitshöhe des anschlagenden Wassers $= h = 2{,}978 + 1{,}5 = 4{,}478$ Fuß.

Zusatz II. Wie weit der Punct G [Fig. 92.] von der verlängerten Verticale AB entfernt ist, welche Entfernung man wegen Construction der Chablone zum obern Theil des Kropfgerinnes wissen muß, findet man, weil dieser Theil oder Bogen eine Parabel ist, aus den Größen c', h'' des vorigen

Zusatzes nach §. 102. Zus. III. 2), nämlich $w = c' \cdot \sqrt{\frac{h''}{g}}$ $= 0{,}24 \cdot c' \cdot \sqrt{h''}$ Fuß.

Der untere Theil des Gerinnes ist ein mit dem Rade concentrischer Kreisbogen.

An den Punct, wo der Parabel- und Kreisbogen an einander stoßen, müssen beyde Bogen eine gemeinschaftliche Tangente haben. Errichtet man auf dieser Tangente in dem gemeinschaftlichen Berührungspunct der Bogen mit der Tangente eine Normallinie nach derjenigen Seite hin, wo das Rad sich befindet: so liegt in dieser Normallinie der Mittelpunct des Rades, welcher nach gegebnen Daten sich nun leicht angeben läßt. Ein Mehreres hierüber findet man in J. C. Späths Abhandlung über die Kröpfe der Mühlgerinne ꝛc. Nürnb. 1815. 8.

§. 163.

Erklärung. Unter Wasserpumpe versteht man überhaupt eine Maschine, bey welcher mittels einer Röhre und eines in derselben auf- und niedergehenden Stempels oder Kolbens das Wasser gehoben werden kann.

Sind bey einer solchen Pumpe in dem Kolben Oeffnungen, und wird das Wasser vorzüglich durch den Druck der Atmosphäre zum Steigen in einen luftleeren Raum gebracht: so nennt man sie eine Saugpumpe oder einen Saugsatz.

Die wesentlichen Theile einer Saugpumpe bestehen in dem Stiefel oder der Kolbenröhre ABCD [Fig. 93.], welches diejenige Röhre ist, worinnen der Kolben FG mittels der Kolbenstange L so bewegt wird, daß bey seinem Aufwärtsgehen dem über ihm befindlichen Wasser und der Luft aller Durchgang verschlossen bleibt, beym Hinunterdrükken aber das unter ihm befindliche Wasser über demselben treten kann. Deswegen ist der Kolben durchlocht und über demselben eine Klappe, ein Ventil oder Lederscheibe angebracht, welche das

Kolbenventil auch Scheibe genannt wird. Der Boden des Stiefels hat eine Oeffnung BC, welche durch das Stiefel- oder Stöckelventil BK geschlossen werden kann. An der Kolbenröhre befindet sich eine zweyte Röhre BCNM, die Saugröhre, die mit ihrem Untertheile, dem Saugstück, unter der Oberfläche HI des Unterwassers oder des Sumpfs stehet. Bey MN, wo das Unterwasser in die Saugröhre eintritt, wird an der Schlundöffnung ein Seiherblech oder geflochtner Korb angebracht, um den Eintritt des Unraths zu verhindern. Das gehobne Wasser läuft bey DE durch den Ausguß ab.

Besteht die Saugröhre aus mehrern Stücken, so heißt das oberste, welches sich zunächst an der Kolbenröhre befindet, der Stöckelkiel, die übrigen heißen Kielstücke.

Bey den Handpumpen wird die Kolbenstange L durch einen geraden oder gebrochnen Hebel in Bewegung gesetzt. Bey Betreibung großer und mehrerer Pumpen zugleich, wie z. B. beym Bergbau, bedient man sich unter andern der Wasserräder, an deren Wellen auf einer Seite oder auf beyden Seiten Krummzapfen eingelegt sind, an deren Warzen Feld- oder Kurbgestänge angehangen werden, welche mit ihren andern Enden in den einen Arm der Kunstkreuze eingreifen, indem an dem andern Arm jedes Kunstkreuzes wieder die Schachtgestänge anhängen, an welchen die Kolbenstangen der einzelnen Pumpen mittels sogenannter Krumse oder Stangenhaken befestiget sind.

Zusatz. Das anfänglich nur bis zur Horizontale HI in der Saugröhre stehende Wasser wird wegen Verdünnung der Luft, welche der Auf- und Niedergang des Kolbens in den Röh-

ren bewirkt, durch den Druck der Atmosphäre auf den Wasserspiegel HI im Sumpf- oder Wasserkästel nach und nach bis zum höchsten Kolbenstande zu steigen genöthiget, dann aber bey fortgesetztem Kolbenspiele bis zum Ausguß DE gehoben und dort ausgegossen.

Die Höhe der Wassersäule, welche im luftleeren Raume unter dem aufwärts steigenden Kolben der Druck der über die Oberfläche HI des Wassers stehenden Atmosphäre zu erhalten vermag, ist aber sehr nahe 14 Mal so hoch, als eine Quecksilbersäule von 28 Pariser Zollen [§. 75. 3)], oder beynahe 32,66 Pariser, $= \frac{144}{125,1} \cdot 32,66 = 37,59$ Leipz. $= 33,8$ Rheinl. Fuß [§. 75.*)].

Jedoch richtet sich diese Höhe des Atmosphärendrucks nach der jedesmaligen **mittlern Barometerhöhe** eines Orts [§. 81.]. Für Freyberg ist nach vielfältigen Beobachtungen diese Höhe $= 26'', 6''', 2$ Pariser Maß [§. 85. Zus. III. Beyspiel.], daher die **Wasserbarometerhöhe** für Freyberg $= k = 14 \cdot \frac{144}{125,1} \cdot \frac{26,5}{12} = 35,59$ Leipz. Fuß, weshalb man auch sonst alle **Saughöhen** (senkrechte Höhen von der Oberfläche des Unterwassers bis zum höchsten Kolbenstand) zu 5 Lachtern oder 35 Leipz. Fuß annahm. Wenn jedoch das Wasser in der Saugröhre dem aufsteigenden Kolben, dessen Geschwindigkeit nicht unter $\frac{2}{3}$ und nicht über $2\frac{1}{2}$ Fuß seyn soll, mit hinlänglicher Geschwindigkeit folgen soll: so darf die seigre Saughöhe nicht über 32 Fuß betragen. Ueber den höchsten Kolbenstand kann man mehrere Fuß hohe Röhren aufsetzen, welche Einrichtung man dann einen **hohen Satz**, und wenn man nur 2 bis 5 Fuß etwa aufbaut, diesen Satz oder diese Pumpe dann einen **niedrigen Satz** nennt.

Die Weite der hölzernen Saugröhren nimmt man so an, daß ihr Durchmesser $\frac{2}{3}$ bis $\frac{1}{2}$ von dem Durchmesser der Kolbenröhre beträgt.

Die Länge eines einzelnen Kielstücks beträgt gewöhnlich 6 Ellen oder 12 Fuß.

Ist das Kolbenholz durchlocht, so hat es gewöhnlich 6, höchstens 8 Löcher. Die obern oder kleinern Durchmesser dieser konischen Löcher [§. 130. Zus. VI.] betragen bey einer

8 Zoll	weiten Kolbenröhre	$1\frac{1}{2}$ Zoll,
10 "	" "	$1\frac{4}{5}$ "
11 "	" "	2 "
12 "	" "	$2\frac{1}{8}$ "

§. 164.

Aufgabe. Die Kraft zu finden, mit welcher der Kolben bey einem Saugsatz [§. 163.] aufgezogen werden muß, Kolbenfriction und andere Bewegungshindernisse bey Seite gesetzt.

Auflösung. Die Höhe des Kolbens über HI [Fig. 93.] sey in irgend einem Augenblick = GI = x, die übrige Höhe bis zum höchsten Wasserstande übern Kolben = GD = y, so erleidet, wenn der ganze Raum in der Pumpe zwischen DH mit Wasser angefüllt ist, der untere Theil des Kolbens vermöge des Atmosphärendrucks auf HI *und wegen* der Wassersäule von der Höhe = x einen Druck nach oben hinaus, wie von einer Wassersäule von der Höhe = k — x [§. 163. Zus.]. Dagegen leidet der Kolben von dem über ihm stehenden Wasser, dessen Höhe = y sey, und von dem über dem Kolben stehenden Atmosphärendruck einen Druck niederzu, wie von einer Wassersäule von der Höhe = k + y, folglich bleibt noch ein Druck auf den Kolben von oben herab übrig, wie von einer Wassersäule = (k + y) — (k — x) = y + x.

Es ist aber x + y die ganze Wasserhöhe vom Wasserspiegel HI des Unterwassers bis zum Spiegel des Wasserstandes bey D über den Kolben in der Kolbenröhre; bezeichnet man also in Fußen mit

H die senkrechte Entfernung dieser beyden Wasserspiegel, oder die Höhe des Ausgußes über den Spiegel des zu hebenden Wassers,

A den Flächeninhalt des Querschnitts der Kolbenröhre, so ist die zu suchende Kraft für das Gleichgewicht = A · H · γ, wenn γ das

Gewicht eines Cubikfusses der Hubwasser bedeutet.

Diese gefundne Kraft nennt man auch die hydrostatische Satzlast, und H die Höhe des hydrostatischen Widerstandes.

Zusatz. Wirkt an der Kolbenstange eine Kraft, welche der hydrostatischen Last gleich ist: so wird dadurch Gleichgewicht, aber keine Bewegung hervorgebracht. Soll der Kolben in Bewegung gesetzt werden, so wird noch mehr Kraft erfordert, die sich unter drey Abtheilungen bringen lässt:

1) die Ueberwältigung des Widerstandes, den die Reibung des Kolbens an den Wänden der Kolbenröhre verursacht, erfordert Kraft.
2) wenn das Wasser längs einer Röhre und durch verschiedne Oeffnungen bewegt werden soll, so ist zur Ueberwindung der dabey vorfallenden Hindernisse ebenfalls Kraft nöthig, weshalb der fortgepflanzte Druck der Atmosphäre gegen den untern Theil des Kolbens vermindert und folglich die gefundne Kraft für das Gleichgewicht vergrößert werden muß.
3) weil der Kolben bey jedem Aufwärtssteigen seine Bewegung von der Ruhe anfängt, so muß die gesammte Masse des Wassers in der Pumpe bey jedem Anhube aus der Ruhe in Bewegung gesetzt werden, und während einer gewissen Zeit eine gewisse Geschwindigkeit erhalten, wozu gleichfalls Kraft erfordert wird.

§. 165.

Aufgabe. Die Reibung zwischen Kolben und Wände der Kolbenröhre beym Aufziehen des Kolbens zu bestimmen.

Auflösung. Setzt man die zur Ueberwältigung dieser Reibung erforderliche Kraft F dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche der Querschnitt A der Kolbenröhre und deren Höhe $= H'''$ ist: so wird $F = A \cdot H''' \cdot \gamma$. Da nun aber die Kolbenfriction sich mit zunehmendem Durchmesser D und zunehmender Höhe H [§. 164.]

vergrößern muß, weil, wenn H größer wird, der Kolben mehr Druck auszustehen hat, und daher stärker gegen die Wände der Kolbenröhre angepresst wird: so kann man auch, wenn man auf jedem Zoll Durchmesser 1 Pfund Kolbenfriction rechnet (s. Baaders vollst. Theorie der Saug- und Hebepumpen rc. S. 112.], $F = \mu \cdot H \cdot D$ Pfund setzen, wo μ durch Versuche bestimmt werden muß. Setzt man nun in ersterm Werth für F statt $A = 0,785 \cdot D^2$, so ist $0,785 \cdot D^2 \cdot H''' \cdot \gamma = \mu \cdot H \cdot D$, und daher $H''' = \frac{\mu}{0,785 \cdot \gamma} \cdot \frac{HD}{D^2} = \frac{\mu}{0,785 \cdot \gamma} \cdot \frac{H}{D} = 1,27324 \cdot \frac{\mu}{\gamma} \cdot \frac{H}{D}$.

Für recht gut polirte Kolbenröhren kann man z. B. in Leipz. Maß und Gewicht $F = 0,96 \cdot H \cdot D$ Pfund setzen (s. von Busse's Betrachtung der Wassersäulenmasch. §. 125.], dann erhält man $H''' = \frac{0,96}{0,785 \cdot \gamma} \cdot \frac{H \cdot D}{D^2} = \frac{0,96}{0,785 \cdot 48,883} \cdot \frac{H}{D} = 0,0251 \cdot \frac{H}{D}$, wenn außer H auch D in Fussen gemessen wird.

Nach dem Verhältnisse, wie die Kolbenröhren und Kolben gut oder schlecht gearbeitet sind, kann man, bis hierüber vollständigere Versuche angestellt worden sind, annehmen:

für gut polirte metallne Kolbenröhr. $H''' = 0,03 \cdot \frac{H}{D}$

- nachgebohrte - - $H''' = 0,06 \cdot \frac{H}{D}$

für gut gebohrte hölz. Kolbenröhr. $H''' = 0,1 \cdot \frac{H}{D}$

- schlecht - - - $H''' = 0,2 \cdot \frac{H}{D}$

[s. Eytelwein's Mechanik und Hydr. S. 327.]

Allgemein sey $H''' = \varphi \cdot \frac{H}{D}$ Fuß.

§. 166.

Aufgabe. Die Kraft zu finden, mit welcher der Kolben bey einem Saugsatz aufgezogen werden muß, mit Hinsicht der Bestimmung des hydraulischen und mechanischen Widerstandes.

Auflösung. Bey der Bestimmung des hydraulischen und mechanischen Widerstandes bezeichne

A den Querschnitt, D den Durchmesser und L die Länge der Kolbenröhre, vom tiefsten Kolbenstande bis Sohle des Ausgusses gemessen.

A' den Querschnitt, D' den Durchmesser und L' die Länge der Saugröhre (wo man unter L' auch die Entfernung des tiefsten Kolbenstandes vom Unterwasser verstehen kann, weil etwaige Abänderungen der wahren Länge der Saugröhre nur wenig Abänderungen in den Resultaten geben).

b den Kolbenhub oder den Raum, welchen der Kolben beym Aufwärtsziehen durchläuft,

τ die Zeit des Kolbenhubes, und

v die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens.

In der Voraussetzung, daß die Bewegung des Kolbens so angeordnet sey, damit ihn beym Aufwärtsgehen das nachfolgende Wasser nicht verlässt (§. 163. Zus.]: so wird von dem Drucke der Atmosphäre, wodurch das Wasser in der Saugröhre zum Steigen gebracht wird, nur ein Theil auf die Bewegung des Wassers verwendet, und man kann sich vorstellen, als ob der Ueberrest den Kolben von unten nach oben presset, welcher Ueberrest = p sey. Setzt man nun die bewegende Kraft, welche auf das unter dem Kolben befindliche Wasser wirkt = Q, und k die des Orts zugehörige Wasserbarome-

terhöhe [§.163. Zus.]: so findet man, wenn h'' nach §. 145. die erforderliche Druckhöhe bezeichnet, um den Widerstand längs den Wänden der Röhren und beym Durchgange durch die verschiednen Oeffnungen zu überwältigen, $Q = (k - L' - \frac{1}{2} b - h'') \cdot A\gamma$.

Wenn nun in der Zeit τ das Wasser, dessen Masse $= N$ sey, in den Röhren auf die Höhe b steigen soll: so muß dazu eine bewegende Kraft $Q' = \frac{b}{g\tau^2} \cdot N$ [§.107. Zus. VI.5)] verwandt werden. Der Ueberrest $Q - Q' = p$ verursacht Druck gegen den Kolben, daher, wenn für die Masse N ihr Werth $(\frac{A^2}{A'} \cdot L' + \frac{1}{2} bA)\,\gamma$, wie §. 145., gesetzt wird: so ist $Q - Q'$ oder die Kraft, welche den Kolben aufwärts presst, nämlich $p = \left[k - L' - \frac{1}{2} b - h'' - \frac{\frac{A}{A'} \cdot L' \cdot b + \frac{1}{2} b^2}{g\tau^2}\right] \cdot A \cdot \gamma$, wo $h'' = v^2 \left(B - \frac{1}{4g}\right)$ [§. 144. Zus. III.] $= v^2 \left[0{,}0236 \cdot \left(\frac{A}{A'}\right)^2 + \frac{\frac{L}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \cdot \frac{L'}{D'}}{2226}\right]$ [§. 144. Zus. II.] ist.

Nun muß man aber auch diejenige Kraft bestimmen, um das über dem Kolben befindliche Wasser zu heben.

Im mittlern Kolbenstande befindet sich über demselben eine Wassersäule von der Höhe $L - \frac{1}{2} b$, bey welcher zur Ueberwältigung der Hindernisse längs den Röhrenwänden, wenn die mittlere Geschwindigkeit v ist, eine Widerstandshöhe $= v^2 \cdot \frac{L - \frac{1}{2} b}{2226 \cdot D}$ [§. 143. Zus. VI.] erfordert wird.

Weil aber die Wassermasse $(L - \frac{1}{2} b) \cdot A$, wenn darauf nicht Rücksicht genommen wird, daß die Kolbenstange einen Theil dieses Wassers verdrängt, beym jedesmaligen Aufziehen des Kolbens aus der

Ruhe so in Bewegung gesetzt werden muß, daß solche in der Zeit τ den Weg b durchläuft: so erhält man die hierzu erforderliche bewegende Kraft $= \frac{b}{g\tau^2} \cdot (L - \frac{1}{2} b) A\gamma$.

Wird nun die Kraft, welche nur das über dem Kolben befindliche Wasser heben soll, $= p'$ gesetzt: so ist $p' =$

$$[k + L - \tfrac{1}{2} b + \frac{v^2 (L - \frac{1}{2} b)}{2226 \cdot D} + \frac{b}{g\tau^2} (L - \tfrac{1}{2} b) + H'''] A \cdot \gamma,$$

wo k die Wasserbarometerhöhe und H''' die Widerstandshöhe der Kolbenfriction [§. 165.] bedeutet. Dieser Kraft p' kommt aber nun von unten gegen den Kolben der vorhin gefundne Druck p zu Hilfe. Setzt man daher die zum Aufziehen des Kolbens erforderliche Kraft $= P$: so ist $p' - p = P$

$$= \gamma A [k + L - \tfrac{1}{2} b + \frac{v^2 (L - \frac{1}{2} b)}{2226 \cdot D} + \frac{b}{g\tau^2} (L - \tfrac{1}{2} b) + H'''] -$$

$$\gamma A [k - L' - \tfrac{1}{2} b - h'' - \frac{b}{g\tau^2} (\frac{A}{A'} \cdot L' + \tfrac{1}{2} b)]$$

$$= [L + L' + h'' + \frac{v^2 (L - \frac{1}{2} b)}{2226 \cdot D} + \frac{b}{g\tau^2} (L + \frac{A}{A'} \cdot L') + H'''] \cdot A\gamma.$$

Nennt man nun

die hydrostatische Widerstandshöhe $L + L' = H$,

die hydraulische Widerstandshöhe $h'' + \frac{v^2 (L - \frac{1}{2} b)}{2226 \cdot D}$

$$= v^2 [0{,}0236 (\frac{A}{A'})^2 + \frac{\frac{L}{D} + (\frac{A}{A'})^2 \cdot \frac{L'}{D'}}{2226} + \frac{L - \frac{1}{2} b}{2226 \cdot D} - 0{,}014] = H',$$

die mechanische Widerstandshöhe $\frac{b}{g\tau^2} (L + \frac{A}{A'} \cdot L') = H''$,

die Höhe des Reibungswiderstandes zwischen Kolben u. s. w. $\varphi \cdot \frac{H}{D} = H'''$,

so ist die allgemeine Formel für die zum Aufziehen des Kolbens erforderliche Kraft oder

$$P = (H + H' + H'' + H''') A \cdot \gamma.$$

Beyspiel I. Ein seigrer Saugsatz habe folgende Dimensionen; man soll die Kraft bestimmen, um den Kolben aufwärts zu ziehen.

Die Länge der Kolbenröhre (vom tiefsten Stand des Kolbens bis zur Sohle des Ausgusses gemessen) sey $= L = 4$ Fuß.

Die Länge der Saugröhre (vom Wasserspiegel im Wasserkästchen bis zum tiefsten Kolbenstand gemessen) sey $L' = 26$ Fuß.

Der Durchmesser der eisernen Kolbenröhre $D = 1$ Fuß, und der Durchmesser der Saugröhre $D' = 4$ Zoll.

Die Höhe des Kolbenhubes $b = 3$ Fuß, und die Zeit zum Aufziehen des Kolbens $= \tau = 6$ Secunden: so ist die Geschwindigkeit des Kolbens $v = \frac{b}{\tau} = \frac{3}{6} = 0{,}5$ Fuß. Es ist demnach

$H = L + L' = 4 + 26 = 30$ Fuß, so wie

$\frac{A}{A'} = \frac{12^2}{4^2} = 9, \left(\frac{A}{A'}\right)^2 = 81$, und

$\frac{L}{D} = \frac{4}{1} = 4, \frac{L'}{D'} = \frac{26 \cdot 12}{4} = 78.$

Hiernach also

$$H' = 0{,}25\left[0{,}0236 \cdot 81 + \frac{4 + 81 \cdot 78}{2226} + \frac{4 - 1{,}5}{2226 \cdot 1} - 0{,}014\right]$$
$$= 0{,}25\,[1{,}912 + 2{,}84 + 0{,}001 - 0{,}014]$$
$$= 0{,}25 \cdot 3{,}739 = 0{,}935 \text{ Fuß.}$$
$$H'' = \frac{3}{17{,}377 \cdot 6^2}(4 + 9 \cdot 26) = \frac{3 \cdot 238}{17{,}377 \cdot 36} = 1{,}168 \text{ F.}$$
$$H''' = 0{,}06 \cdot \tfrac{30}{1} = 1{,}8 \text{ Fuß, folglich}$$
$$P = (30 + 0{,}935 + 1{,}168 + 1{,}8) \cdot \frac{1^2 \cdot 3{,}141}{4} \cdot 50$$
$$= 33{,}903 \cdot 39{,}262 = 1331 \text{ Pfund.}$$

Beyspiel II. Für einen Satz, welcher gegen den Horizont unter einem Winkel $\alpha = 60^\circ$ geneigt ist, sey $L = 5$ Fuß, $L' = 30$ Fuß, sonst alles wie vorhin: man sucht P.

In diesem Falle ist

$H = (L + L') \cdot \sin\alpha = 35 \cdot \sin 60° = 30{,}31$ Fuß.

$\frac{L}{D} = \frac{5}{1} = 5,\ \frac{L'}{D'} = \frac{30 \cdot 12}{4} = 90.$ Hiernach

$H' = 0{,}25\,[0{,}0236 \cdot 81 + \frac{5 + 81 \cdot 90}{2226} + \frac{5 - 1{,}5}{2226 \cdot 1} - 0{,}014]$

$= 0{,}25\,[1{,}912 + 3{,}277 + 0{,}0015 - 0{,}014]$

$= 0{,}25 \cdot 5{,}1765 = 1{,}294$ Fuß.

$H'' = \frac{3}{17{,}377 \cdot 6^2}(5 + 9 \cdot 30) = \frac{3 \cdot 275}{17{,}377 \cdot 36} = 1{,}319$ F.

$H''' = 0{,}06 \cdot \frac{30{,}31}{1} = 1{,}82$ Fuß. Also

$P = (30{,}31 + 1{,}294 + 1{,}319 + 1{,}82) \cdot 39{,}262$

$= 34{,}743 \cdot 39{,}262 = 1364$ Pfund.

§. 167.

Aufgabe. Die Kraft zu finden, welche nöthig ist, um den Kolben in der Kolbenröhre wieder niederzudrücken, mit Hinsicht auf die dabey vorkommenden Bewegungshindernisse.

Auflösung. Soll der Kolben in der Kolbenröhre wieder niedergeschoben werden, so wird man für die dazu erforderliche Kraft P' nach dem Bisherigen folgenden Werth finden.

Behält man die bisherige Bezeichnung bey, setzt das Gewicht des Kolbens nebst Stange bey Seite, und nimmt an, daß der Kolben mit der Geschwindigkeit v' sich niederwärts bewegt: so muß das unter ihm befindliche Wasser, wenn man den Flächeninhalt der Kolbenlochung $= a$ nennt, mit der Geschwindigkeit $v' \cdot \frac{A}{a}$ durch die Kolbenlochung fließen, wozu eine Druckhöhe $H'''' = \frac{1}{\alpha^2}(v' \cdot \frac{A}{a})^2$ $= 0{,}0218 \cdot v'^2 (\frac{A}{a})^2$ [§. 130. Zus. VII. 5)] erfordert wird.

Bey der Reibung des Kolbens [§. 165.] kann die Höhe der Kolbenröhre in Rechnung gebracht werden, alsdann wird zum Niederschieben des Kolbens eine Wassersäule von der Höhe $H'''' + H''''' = 0{,}0218 \cdot v'^2 \cdot \left(\frac{A}{a}\right)^2 + \varphi \cdot \frac{L}{D}$ erfordert, und man findet die Kraft zum Niederschieben des Kolbens = $P' = \left[0{,}0218 \cdot v'^2 \left(\frac{A}{a}\right)^2 + \varphi \cdot \frac{L}{D}\right] \cdot A \cdot \gamma = (H'''' + H''''') A \cdot \gamma$.

Beyspiel. Mit Beybehaltung der im letzten Beyspiel I. angenommenen Größen findet man, wenn $a = 20$ Quadratzolle, also $\frac{A}{a} = \frac{6^2 \cdot 3{,}141}{20} = 5{,}65$; $\left(\frac{A}{a}\right)^2 = 31{,}9$ ist; $H'''' + H''''' = 0{,}0218 \cdot 0{,}5^2 \cdot 31{,}9 + 0{,}06 \cdot \frac{4}{7} = 0{,}42$ Fuß, und die Kraft zum Niederschieben

$$P' = 0{,}42 \cdot 39{,}262 = 16 \text{ Pfund.}$$

Und für Beyspiel II. $H'''' + H''''' = 0{,}0218 \cdot 0{,}5^2 \cdot 31{,}9 + 0{,}06 \cdot \frac{5}{7} = 0{,}48$ Fuß, daher die Kraft zum Niederschieben

$$P' = 0{,}48 \cdot 39{,}262 = 19 \text{ Pfund.}$$

Zusatz I. Da bey den einfachen Saugpumpen die Kraft P zum Aufziehen des Kolbens beträchtlich größer ist, als die Kraft P' zum Niederschieben des Kolbens: so legt man, vorzüglich bey großen Pumpenwerken, wie z. B. beym Bergbau an den Kunstgezeugen, die Pumpen immer paarweise von gleichen Dimensionen so an, daß wenn der eine Kolben aufgezogen, der andre niedergeschoben wird, wodurch man den Vortheil erhält, daß immer einerley Kraft auf die Pumpen verwandt wird. Denn für ein Paar Pumpen von gleichen Dimensionen ist dann bey jedem Auf- oder Niedergang des Kolbens die Kraft stets $= P + P'$ für n Paare $= n(P + P')$.

Zusatz II. Nennt man den Querschnitt der Kolbenstange $= a'$, so ist mit Beybehaltung der bisherigen Bezeichnungen [§. 166.], die Menge der Hubwasser während eines Hubes $= (A - a') \cdot b$.

Ist a' nicht zu klein gegen A, so findet noch während des Niedergangs des Kolbens eine merkliche Ausflußmenge Statt, die genau der Wassermenge gleich ist, welche der Theil der Kolben- oder Zugstange, der wechselsweise aus dem Wasser tritt, und sich wieder untertaucht, aus seiner Stelle verdrängt. Die Ausflußmenge beym Niedergang ist nämlich $= a' \cdot b$. Das ganze Hubwasser während eines Kolbenspiels ist daher $= A \cdot b$.

Wegen Unvollkommenheit der Ventile fällt aber immer ein Theil der gehobnen Hubwasser wieder zurück, und je schlechter die Kolben in der Liederung sind, desto größer ist dieser Theil. Bey unsern in Freyberg neu gelicderten Lederstulpkolben kann man diesen Theil auf $\frac{1}{10}$ der Hubwasser anschlagen, so daß also die Menge der Hubwasser während eines Kolbenspiels $= M' = 0{,}9 \cdot A \cdot b$ beträgt. Sind aber die Kolben schon im Gebrauch, jedoch noch nicht zu sehr abgenutzt: so kann man nur $M' = 0{,}8 \cdot A \cdot b$ bis $= 0{,}6 \cdot A \cdot b$ annehmen.

Zusatz III. Bey der Anlage einer Pumpe und bey Bestimmung des Durchmessers der zugehörigen Kolbenröhre muß man den Wasserzurückgang in Rechnung bringen. Hätte man z. B. in dem Tiefsten eines Schachtes oder dergl. in der Minute $= m$ Cubikfuß Wasserzugänge, und man wollte eine Pumpe einbauen, mittels welcher man bey $= b$ Fuß Hub und bey $= n$ Spielen in der Minute die Wasser gewältigen wollte: so müßten bey jedem Hube $= \frac{m}{n} + 0{,}1 \cdot \frac{m}{n} = 1{,}1 \cdot \frac{m}{n}$ Cubikfuß Wasser in Rechnung gebracht werden. Demnach müßte der Durchmesser der Kolbenröhre $= D = 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1{,}1 \cdot m}{b \cdot n \cdot \pi}\right)}$ [Geom. §. 237. Zus. I. 2)] $= 1{,}182 \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{n \cdot b}\right)}$ Fuß $= 14{,}2 \sqrt{\left(\frac{m}{n \cdot b}\right)}$ Zolle seyn.

Z. B. in einem Abteufen hat man in der Minute 1 Cubikfuß Wasserzugänge, man will eine Handpumpe mit 8 Zoll $= 0{,}6666$ Fuß Hub einbauen, und in der Minute 6 Spiele machen lassen: so müßte der Durchmesser der Kolbenröhre $= D = 14{,}2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{6 \cdot 0{,}6666}\right)} = 7{,}1$ Zoll betragen.

Anmerkung I. Es ist $\log 1{,}182 = 0{,}07315$, und $\log 14{,}2 = 1{,}15233$.

Anmerkung II. Werden Kunstgezeuge durch Wasserräder im Umtriebe gesetzt, so werden die Schachtstangen, an welchen die Saugsätze angebaut sind, mittels eines Krumm-

zapfens oder zweyer in der Welle des Wasserrades eingelegten Krummzapfen, an welchen die Schachtgestänge angeschlossen werden, in eine auf- und niedergehende Bewegung gebracht. Denkt man sich nun die Kraft, welche zum Aufziehen der Kolben und zur Ueberwältigung der Hindernisse nöthig ist, an der Warze der Krummzapfen angebracht, nennt diese Kraft $= P$, die gesammte angehängte Last $= Q$, und den Arm des Krummzapfens $= r$: so verhält sich der Weg der Kraft P : Weg der Last $Q = r \cdot \pi : 2r = \pi : 2$. Für einen gleichförmigen Beharrungszustand der Maschine verhält sich aber der Weg der Kraft P : Weg der Last $Q = Q : P$; daher im Beharrungszustand der Maschine $Q : P = \pi : 2$, und $P = \frac{2}{\pi} \cdot Q$ **die auf den Warzenkreis des Krummzapfens reducirte mittlere Last.**

Diese mittlere Last $= \frac{2}{\pi} \cdot Q$ wird, wenn zu beyden Seiten der Radwelle Schachtgestänge nebst gleichviel gleich vertheilten Sätzen angeschlossen sind, bey einem Umgange des Rades zweymal durch den Durchmesser $= 2r$ des Warzenkreises gebracht, also bey n Umgängen des Rades in der Minute durch den Raum $= n \cdot 4r$ hin- und herbewegt: so daß demnach das mechanische Lastmoment am Krummzapfen $= \frac{2}{\pi} \cdot Q \cdot \frac{4rn}{60} = \frac{8rnQ}{60 \cdot \pi}$ ist.

Wird nun z. B. ein Kunstgezeug mittels eines oberschlägigen Wasserrades in Bewegung gesetzt, so ist für den Beharrungszustand der Maschine nach §.156. Zus. I. 2) $\lambda \cdot D \cdot M \cdot \gamma = \frac{8rnQ}{60 \cdot \pi}$, und daher die nöthige Menge der Aufschlagewasser in einer Secunde $= M = \frac{8r \cdot n \cdot Q}{60 \cdot \pi \cdot \lambda \cdot D \cdot \gamma}$ Cubikfuß.

Z. B. bey einem Kunstgezeuge betrage die gesammte zu überwindende Last mit Einschluß der Friction an den Gestängwalzen, Kunstkreuzen ꝛc. $= Q = 8000$ Pfund, der Arm des Krummzapfens $= r = 1{,}5$ Fuß; ferner sey die Höhe des oberschlägigen Rades $= D = 20$ Ellen $= 40$ Fuß, und das Rad soll in der Minute $= n = 5$ Umgänge machen: so sind, wenn die Wasser in der zweyten Schaufel einschlagen, zu seinem Betriebe in der Secunde $= M = \frac{8 \cdot 1{,}5 \cdot 5 \cdot 8000}{60 \cdot 3{,}141 \cdot \frac{5}{6} \cdot 40 \cdot 50} = 1{,}528$ Cubikfuß, oder in der Minute $= 60 \cdot 1{,}528 = 92$ Cubikfuß Wasser nöthig.

§. 163.

Erklärung. Eine **Wassersäulenmaschine** nennt man die Vorrichtung zweyer ungleich

hohen communicirenden Röhren [§. 61.], wo in der höhern Röhre CD [Fig. 94.], der Einfallröhre, Wasser aus einem Kasten AE von einer beträchtlichen Höhe herabfällt, welches durch horizontale Röhren DF, Kniestücke, herumgeführt, und in einer senkrecht stehenden Röhre, dem Haupt- oder Treibecylinder GH geleitet wird, um nach hydrostatischen Gesetzen [§. 62. Zus. I.] einen in dem Treibecylinder steckenden Kolben K in die Höhe zu schieben, welcher Kolben mit einem Pumpen- oder Schachtgestänge LM so verbunden ist, daß sein Emporgehen zugleich den Aufgang der Zugstangen und das Anheben der Sätze [§. 163.] bewirkt. Sobald der Kolben K seinen höchsten Stand erreicht hat, muß mittels der Wendungspipe NQ durch Umdrehung eines Kreuzhahns die Fallröhre verschlossen werden, damit das Wasser in derselben nicht ferner auf den Kolben K drücke, und zu gleicher Zeit muß das unter dem Kolben K stehende Wasser durch die Wendungspipe durch den Ausgang P aus dem Treibecylinder abgeleitet werden, wodurch nun der Kolben K und das Pumpen- oder Schachtgestänge LM vermöge ihrer eignen Schwere heruntersinken. Wenn der Kolben seinen niedrigsten Stand wieder erreicht hat, muß der Kreuzhahn in der Wendungspipe NQ sich wieder so öffnen, daß durch das abermalige Zuströmen des Wassers ein Steigen des Kolbens K und Anheben der Kunstsätze bewirkt wird, und das Spiel der Maschine sich wiederholt.

Die künstliche und abgemessene Vorrichtung zum Drehen des Kreuzhahns in der Wendungspipe NQ nennt man die Steuerung. Das Drehen

des Kreuzhahns muß von der Maschine selbst geschehen.

Damit durch das Aufsteigen der Kolbenstange KR die ansehnliche Last der Schacht- und übrigen Kolbenstangen in die Höhe gehoben werden könne, kommt man dem Druck des Wassers gegen den Kolben K dadurch zu Hilfe, daß die Kolbenstange KR mittels einer Kette an einem Balancier ST befestiget ist, welcher durch ein Gegengewicht, das gewöhnlich aus einem mit Steinen gefüllten Kasten U besteht, beynahe mit der Last des Schachtgestänges nebst Zubehör ins Gleichgewicht gebracht werden kann. Der Kolben K hat alsdann beym Steigen nur die Satzlast und den Rest des Schachtgestänges zu heben, der vom Balancier nicht aufgehoben wird, und so groß seyn muß, daß der Niedergang des Kolbens mit einer gewissen Geschwindigkeit erfolge.

Außer der Wendungspipe NQ ist bey V in der Fallröhre noch ein Hahn zum Anlassen oder Sperren der Maschine.

Anmerkung. Eine genaue Erklärung dieser Maschine gehört in die Maschinenlehre. Hier kann nur so viel gesagt werden, als zu einer etwaigen hydraulischen Beurtheilung dieser Maschine erfordert wird.

Eine wahre pragmatische Beschreibung der Wassersäulenmaschine und namentlich der Schemnitzer findet man im Journal einer bergmännischen Reise ꝛc. von W. G. E. Becker, erster Theil, Freyberg 1815. 8. S. 52., so wie eine vollständige Berechnung einer Wassersäulenmaschine in dem schon erwähnten und sehr lehrreichen Werke: Betrachtung der Winterschmidt- und Höll'schen Wassersäulenmaschine ꝛc. vom Herrn Bergcommissionrath F. G. von Busse, Freyberg 1804.

Auch findet man mehreres hierüber in der Encyklopädie des gesammten Maschinenwesens ꝛc. von D. J. H. M. Poppe, 5ten Theil, Leipzig 1810.

§. 169.

Aufgabe. Die Kraft zu bestimmen, welche der Treibekolben K [Fig. 94.] zur Bewegung der übrigen Kolbenstangen ausüben kann.

Auflösung. Es sey

H die Höhe des Wasserspiegels AB im Wasserkasten über den niedrigsten Stand des Kolbens,

A der Querschnitt und D der Durchmesser des Treibcylinders,

b die Höhe des Kolbenhubes,

A' der Querschnitt, D' der Durchmesser und L' die Länge der Kniestücke,

A'' der Querschnitt, D'' der Durchmesser und L'' die Länge der Einfallröhre:

so ist die hydrostatische Druckhöhe, welche von unten gegen den Kolben presst, $= H$, und wenn v die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens ist, die hydraulische Widerstandshöhe, den Krümmungswiderstand in den Röhren bey Seite gesetzt, [§. 144. Zus. I.]

$$H' = \frac{v^2}{2226}\left[\frac{b}{D} + \left(\frac{A}{A'}\right)^2 \cdot \frac{L'}{D'} + \left(\frac{A}{A''}\right)^2 \cdot \frac{L''}{D''}\right].$$

Die Höhe des Reibungswiderstandes

$$H'' = \varphi \cdot \frac{H}{D} \text{ [§. 165.]}$$

Weil ferner die Wassermasse bey jedem Steigen des Kolbens aus der Ruhe in Bewegung gesetzt werden muß, wenn τ die Zeit eines Kolbenhubes bezeichnet, die Höhe des mechanischen Widerstandes [§. 166.]

$$H''' = \frac{b}{g\tau^2}\left(b + \frac{A}{A'} \cdot L' + \frac{A}{A''} \cdot L''\right).$$

Hiernach ist die gesammte Kraft, welche der Kolben beym Steigen ausüben muß =

$$P = [H - (H' + H'' + H''')]\, A \cdot \gamma.$$

Beyspiel. Es sey bey einer Wassersäulenmaschine $H = 378$ Fuß, $D = 14$ Zoll, $b = 6{,}5$ Fuß, $D' = 5{,}5$ Zoll, $L' = 6$ Fuß, $D'' = 6$ Zoll, $L'' = 380$ Fuß, und die Zeit eines Kolbenhubes sey $= \tau = 5$ Secunden: so ist die mittlere Geschwindigkeit des Treibekolbens $= v = \frac{b}{\tau} = \frac{6{,}5}{5} = 1{,}3$ Fuß, und $v^2 = (1{,}3)^2 = 1{,}69$. Ferner ist

$$\frac{A}{A'} = \frac{14^2}{(5{,}5)^2} = \frac{196}{30{,}25} = 6{,}48;\ \left(\frac{A}{A'}\right)^2 = 41{,}99;$$

$$\frac{A}{A''} = \frac{14^2}{6^2} = \frac{196}{36} = 5{,}44;\ \left(\frac{A}{A''}\right)^2 = 29{,}59;$$

$$\frac{L'}{D'} = \frac{6 \cdot 12}{5{,}5} = 13{,}09;\ \frac{L''}{D''} = \frac{380 \cdot 12}{6} = 760;$$

$$\frac{b}{D} = \frac{6{,}5 \cdot 12}{14} = 5{,}56.$$ Hiernach also

$$H' = \frac{1{,}69}{2226} \cdot (5{,}56 + 41{,}99 \cdot 13{,}09 + 29{,}59 \cdot 760)$$
$$= \frac{1{,}69}{2226} \cdot 23043{,}61 = 17{,}49 \text{ Fuß}.$$

$$H'' = 0{,}06 \cdot \frac{378 \cdot 12}{14} = 19{,}44 \text{ Fuß}.$$

$$H''' = \frac{6{,}5}{17{,}377 \cdot 25} \cdot (6{,}5 + 6{,}48 \cdot 6 + 5{,}44 \cdot 380)$$
$$= \frac{6{,}5}{17{,}377 \cdot 25} \cdot 2112{,}58 = 31{,}61 \text{ Fuß}.$$ Folglich

$$P = \frac{14^2 \cdot 3{,}141}{4 \cdot 144} \cdot [378 - (17{,}49 + 19{,}44 + 31{,}61)] \cdot 50$$
$$= \frac{14^2 \cdot 3{,}141}{576} \cdot (378 - 68{,}54) \cdot 50 = 16540 \text{ Pfund}.$$

Zusatz. Ist τ' die Zeit, in welcher der Kolben niedersinkt: so ist die Zeit eines Kolbenspiels $= t = \tau + \tau'$, und in dieser Zeit muß die Einfallsröhre die Wassermenge $= A \cdot b$ liefern. Es ist daher die zur Betreibung der Maschine in jeder Minute erforderliche Wassermenge $= M = \frac{60 \cdot Ab}{t}$.

Anmerkung. Aus der auf dem Treibekolben reducirten Last, und aus dem Gefälle läßt sich nach dem Bisherigen und mittels §. 60. Zus. I. der nöthige Querschnitt und Durchmesser des Treibecylinders einer Wassersäule bestimmen.

VI.

Erste Gründe der Aerodynamik.

§. 170.

Erklärung. Die Wissenschaft von der Bewegung der Luft und andrer elastischer Flüssigkeiten heißt die Aerodynamik oder Pnevmatik.

Anmerkung. Hier schränken wir uns wieder nur auf die gemeine oder atmosphärische Luft ein.

§. 171.

Erklärung. Die Kraft, mit welcher die Luft dem Zusammendrücken widersteht, nennt man ihre absolute Elasticität oder Spannung [§. 71. Zus. I. II. III.], und als Maß derselben kann die Höhe einer Wassersäule dienen, welche mit dem Gegendrucke im Gleichgewichte ist [§. 75. Zus. IV.].

§. 172.

Lehrsatz. Bey Flüßigkeiten von verschiedner Dichtigkeit verhalten sich die Quadrate der Geschwindigkeiten, womit die Flüs-

sigkeiten durch die Ausflußöffnungen der Gefäße, worinnen sie sich befinden, auslaufen, wie die Höhen der Wassersäulen, welche dem Drucke der Flüssigkeiten gegen die Ausflußöffnungen gleich sind, dividirt durch die Dichtigkeiten.

Beweis. Der allgemeine Beweis §. 130. für das Verhältniß der Geschwindigkeiten, womit Wasser unter verschiednen Druckhöhen aus einem Gefäße fließt, gilt für alle Flüssigkeiten. Wenn sich daher Wasser und irgend eine andere Flüssigkeit in zwey verschiednen Gefäßen befinden, und es ist h die Druckhöhe des Wassers und c die Geschwindigkeit, mit welcher dasselbe aus der Oeffnung des Gefäßes fließt, H die Druckhöhe der Flüssigkeit und C deren Geschwindigkeit an der Ausflußöffnung: so verhält sich $c^2 : C^2 = h : H$, vorausgesetzt, daß die Flüssigkeiten beym Ausflusse keinen Widerstand leiden.

Sind nun d, d' die eigenthümlichen Gewichte des Wassers und der Flüssigkeit, so wird dadurch zugleich das Verhältniß ihrer Dichtigkeiten angezeigt [§. 8. Zus. I. §. 9.], und man findet die Höhe einer Wassersäule H', welche auf die Ausflußöffnung der Flüssigkeit eben so stark als die Säule der Flüssigkeit von der Höhe H und Dichtigkeit d' drückt, nämlich $H' = \frac{H \cdot d'}{d}$, weil nach §. 62. Zus. II. $H' : H = d' : d$ ist.

Nun verhält sich aber auch $c^2 : C^2 = \frac{h \cdot d'}{d} : \frac{H \cdot d'}{d} = \frac{h \cdot d'}{d} : H'$. Folglich $c^2 : C^2 = \frac{h}{d} : \frac{H'}{d'}$.

§. 173.

Aufgabe. Wenn eine elastische Flüssigkeit in einem Gefäße eingeschlossen ist, in welchem sich eine kleine Oeffnung befindet, die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher die Flüssigkeit bey unveränderter Dichtigkeit und Druckhöhe ausströmt.

Auflösung. Da sich der Druck, welchen die in dem Gefäße eingeschloßne elastische Flüssigkeit gegen die verschloßne Oeffnung ausüben würde, mit dem Drucke einer Wassersäule vergleichen lässt: so lässt sich daraus, wenn das Verhältniß der Dichtigkeit der Flüssigkeit zur Dichtigkeit des Wassers bekannt ist, die Geschwindigkeit bestimmen, mit der die elastische Flüssigkeit ausfließen wird, wenn kein Widerstand in Absicht der Ausströmung Statt findet.

Aus dem im vorigen §. aufgestellten Lehrsatz erhält man, wenn sich die Größen C, H' und d' auf die angenommene Flüssigkeit beziehen, $C^2 = \frac{c^2}{h} \cdot \frac{d}{d'} \cdot H'$, oder weil $\frac{c^2}{h} = 4g$ [§. 99. 3)]: so findet man die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit ausströmt

$$1)\ C = 2\sqrt{(g \cdot \frac{d}{d'} \cdot H')}.$$

Oder setzt man das Verhältniß $\frac{d}{d'}$ dem Verhältniß $\frac{1}{\delta}$ gleich: so ist

$$2)\ C = 2\sqrt{(g \cdot \frac{1}{\delta} \cdot H')}.$$

§. 174.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher die atmosphärische Luft durch eine kleine Oeffnung in einen luftleeren Raum einströmt.

Auflösung. Setzt man das Verhältniß des eigenthümlichen Gewichts des Wassers und der atmosphärischen Luft, d. i. $1 : \delta = 1 : \frac{1}{800}$ [§. 77. Zus. II.], und H' = der Höhe einer Wassersäule, welche dem Druck der Atmosphäre entspricht [§. 75.], C die Geschwindigkeit der im luftleeren Raum einströmenden Luft: so ist nach §. 173. 2)

$$C = 2\sqrt{(g \cdot 800 \cdot H')}$$
$$= 56,57 \cdot \sqrt{(g \cdot H')}.$$

Beyspiel. Für $g = 17,377$ Leipz. Fuß, $H' = 37$ Leipz. Fuß [§. 163. Zus.] ist die Geschwindigkeit der in einen luftleeren Raum einströmenden atmosphärischen Luft $= 56,57 \cdot \sqrt{(17,377 \cdot 37)}$ $= 1434$ Leipz. Fuß.

§. 175.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher verdichtete Luft durch eine kleine Oeffnung in einen luftleeren Raum einströmt.

Auflösung. Es sey die verdichtete Luft mmal dichter als die atmosphärische, so wird auch ihre absolute Elasticität oder Spannung [§. 171.] mmal größer, und daher nach §. 173. 2) die Geschwindigkeit dieser einströmenden Luft in einen luftleeren Raum, d. i.

$$C' = 2 \cdot \sqrt{(g \cdot \frac{1}{m\,\delta} \cdot m \cdot H')}$$
$$= 2\sqrt{(g \cdot \tfrac{1}{\delta} \cdot H')} \text{ seyn.}$$

Da nun aber der Ausdruck $2\sqrt{(g \cdot \frac{1}{\delta} \cdot H')}$ auch die Geschwindigkeit der atmosphärischen Luft ist, mit welcher dieselbe in einen luftleeren Raum einströmt: so ist daher die Geschwindigkeit, womit verdichtete Luft in einen leeren Raum eindringt, die-

selbe, mit welcher die gemeine oder atmosphärische Luft in einen leeren Raum einströmt.

Zusatz. Es sind daher die Geschwindigkeiten der in einen leeren Raum eindringenden übrigens verschiedentlich gespannten atmosphärischen Luft sich immer gleich.

§. 176.

Aufgabe. Die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher verdichtete Luft, welche in einem Gefäße eingeschlossen ist, durch eine kleine Oeffnung in die atmosphärische Luft überströmt.

Auflösung. Um die Geschwindigkeit zu finden, mit welcher verdichtete Luft durch eine kleine Oeffnung in die atmosphärische überströmen muß: so denke man sich an der Oeffnung eine Luftsäule, die durchgehends so dicht als die ausströmende Luft sey, und die durch ihr bloßes Gewicht eine Spannung [§. 171.] besäße, welche dem Unterschiede der Spannungen der Luft an beyden Seiten der Oeffnung gleich käme. Die zu dieser Höhe als Fallhöhe gehörige Endgeschwindigkeit ist gleich der Geschwindigkeit, mit der die Luft aus dem Gefäße in die atmosphärische ausströmt.

Ist daher der Unterschied der Spannungen zwischen der verdichteten und atmosphärischen Luft $= 1 - \frac{1}{m}$, so ist, weil nach vorhergehendem §. verdichtete Luft in einen leeren Raum mit einer Geschwindigkeit $= 2\sqrt{(g \cdot \frac{3}{3} \cdot H')}$ einströmt, die Geschwindigkeit, mit welcher die verdichtete Luft in die atmosphärische ausströmt

$$C'' = 2\sqrt{[g \cdot \tfrac{3}{3} \cdot H' \cdot (1 - \tfrac{1}{m})]}.$$

Zusatz. Dasselbe gilt, wenn die atmosphärische Luft durch eine kleine Oeffnung in Luft von geringer Spannung eindringt.

Anmerkung. Nach Gilbert's Annalen der Physik B. 22. S. 250. und 286. zeigen die Versuche einiger Englischer Physiker, daß beym Durchströmen der Luft durch Oeffnungen eine ähnliche Zusammenziehung des Luftstroms, wie beym Wasser vorkommt, und daß die größte Geschwindigkeit in der Zusammenziehung Statt findet, weiterhin aber, wo die Luft sich rings umher ausbreitet, sehr schnell abnimmt.

§. 177.

Erklärung. Das Eindringen der Luft von größerer Spannung in Luft von kleinerer Spannung oder in einen luftleeren Raum bezeichnet man mit dem Ausdruck **Blasen**, und den eindringenden Luftstrom selbst mit dem Ausdruck **Wind**.

Zusatz. Maschinen, welche die Luft verdichten, und aus welchen die verdichtete Luft, stetig oder absatzweise, so lange sie im Gange erhalten werden, bläst, nennt man Gebläse.

Aus der Spannung der verdichteten Luft und aus dem spezifischen Gewichte derselben läßt sich mit Hilfe des §. 176. in der Maschinenlehre der Effect der Gebläse berechnen, und z. B. angeben, wie viel Cubikfuß Luft das Gebläse in jeder Minute hergeben, und in einem Schmelzofen oder in ein Windbehältniß hineinblasen muß. Dergleichen Berechnungen würden aber um so richtiger ausfallen, wenn man die Gestalt des zusammengezognen Luftstroms [§. 176. Anm.] durch eine Oeffnung, und den Einfluß von angesetzten Röhren auf das Durchströmen derselben genau kennte.

§. 178.

Erklärung. Wird an irgend einer Stelle des Luftkreises [§. 73.] durch irgend eine oder mehrere Ursachen, unter denen Erwärmung und Erkältung die vorzüglichsten sind, das Gleichgewicht der Luft in dieser und der benachbarten Stelle in Hinsicht auf Druck, Dichtigkeit, Spannung ꝛc. aufgehoben: so dringt der stärkere Theil dahin, wo er geringern Widerstand findet, und es entsteht eine gerade fortgehende Bewegung der Luft, oder auch ein Luftstrom,

den man den atmosphärischen Wind [§. 177.] oder den Wind in der Atmosphäre nennt.

Zusatz I. Die mehresten Winde wehen oder blasen [§. 177.] horizontal, oder weichen doch nicht viel von der wagrechten Richtung ab. Bisweilen gibt es jedoch in der Luft Ströme, deren Richtungen nach verschiednen Winkeln, abwärts oder aufwärts geneigt, auch wohl gar lothrecht oder in verschiednen Luftschichten einander entgegengesetzt sind.

An einigen Orten sind die Winde das ganze Jahr hindurch beständig; an andern verändern sie sich periodisch nach gewissen Gesetzen; an sehr vielen Orten findet man wieder lauter veränderliche Winde, deren Wechsel und Ungleichheit unaufhörlich sind.

Die beständigen Winde wehen sehr gleichförmig und gelind, ihre Geschwindigkeit beträgt nicht über 10 bis 15 Fuß. Die unbeständigen Winde hingegen sind geschwinder und heftiger. Bey einer Geschwindigkeit zwischen 40 und 60 Fuß führen sie den Namen Stürme, und die noch geschwindern heißen Orkane.

Der Wind ist gemeiniglich über der Erde am stärksten, weil ihn da kein Hinderniß schwächt; daher auch auf der See heftiger, als auf dem festen Lande, und in flachen Gegenden stärker und beständiger, als in gebirgigten und waldigten Gegenden.

Zusatz II. Die Stärke des Windes ergibt sich aus der Größe des aerodynamischen Druckes oder aus seinem Stoße, welchen er auf Ebenen von bekannter Größe, gegen die er in normaler Richtung stößt, äußert.

Instrumente, welche bestimmt sind, die Stärke oder die Geschwindigkeit des Windes zu messen, nennt man Anemometer oder Windmesser. Ist die Geschwindigkeit des Windes bekannt, so läßt sich die Stärke des Windes oder der Windstoß durch Rechnung finden.

§. 179.

Aufgabe. Den Windstoß auf Flächen zu berechnen.

Auflösung. Erster Fall. Wenn der horizontal wehende Wind auf eine ruhende verticale Fläche normal stößt.

Es sey die Geschwindigkeit des Windes = c Fuß, die Größe der ruhenden Fläche = F Quadratfuß: so ist die Menge Wind oder Luft, die in t Secunden zum Stoße gelangt, = $M' = c \cdot t \cdot F$ Cubikfuß. Ist nun das Gewicht eines Cubikfusses Luft = γ' Pfund, so ist das Gewicht der stosenden Masse = $M'\gamma' = c \cdot t \cdot F \cdot \gamma'$. Der Stoß dieser Masse, welche sich mit der Geschwindigkeit = c gegen die Fläche F bewegt, muß aber so groß seyn, als die Kraft, welche nöthig ist, dieser Masse die Geschwindigkeit c beyzubringen. Nennt man diese Kraft = P Pfund, so ist nach §. 107. Zus. VI. 5)

$$P = \frac{c}{2gt} \cdot M'\gamma' = \frac{c}{2gt} \cdot c \cdot t \cdot F \cdot \gamma'$$
$$= \frac{c^2}{2g} \cdot F \cdot \gamma' = 2h \cdot F \cdot \gamma',$$

wenn h die der Geschwindigkeit c zugehörige Fallhöhe ist [§. 99. 3)].

Die **Woltmannschen** Versuche haben aber gezeigt, daß der normale Windstoß gegen ruhende Flächen von F Quadratfuß nicht = $2h \cdot F \cdot \gamma'$, sondern nur $\frac{4}{3} \cdot h \cdot F \cdot \gamma'$ anzunehmen sey. Man hat daher allgemein den **normalen Stoß des Windes auf eine ruhende Fläche** =

$$P = \frac{4}{3} \cdot \frac{c^2}{4g} \cdot F \cdot \gamma'.$$

Zweyter Fall. Wenn der horizontal wehende Wind auf eine ausweichende verticale Fläche normal stößt.

Aus dem vorigen oder ersten Fall ergibt sich, daß der einfache a priori aufgefundene Ausdruck des normalen Windstoses gegen eine ruhende Fläche mit dem normalen Stoß des Wassers gegen eine ebenfalls ruhende Fläche nach §. 150. übereinstimmt, und daß daher nun auch alle Lehren über den hy-

draulischen Druck oder Wasserstoß auf den aerodynamischen Druck oder Windstoß, nur mit Benutzung einiger Erfahrungen, angewendet werden können.

Behalten daher alle vorige Bezeichnungen auch hier dieselbe Bedeutung, nur daß = v die Geschwindigkeit der ausweichenden Fläche nach der Richtung des Windes bezeichnet: so ist, wenn $c > v$ ist, wie §. 151, 2) nur mit Hinsicht auf die Woltmannschen und andrer*) Erfahrungen **der normale Stoß des Windes gegen eine ausweichende Fläche**, nämlich

$$P = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{c^2 - cv}{2 \cdot g} \cdot F \cdot \gamma'.$$

Dritter Fall. Wenn der horizontal wehende Wind auf eine verticale und ausweichende Fläche schief stößt.

Ist der Winkel, den die Richtung des Windes mit der Fläche macht, ein spitzer Winkel und $= \beta$, so findet man, wenn die vorigen Größen die vorige Bedeutung behalten, auf eine ähnliche Weise wie §. 152. nur mit Hinsicht der bisherigen Erfahrungen **den Parallelstoß des Windes auf eine ausweichende Fläche**, nämlich

$$P' = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{(c^2 - cv)}{2 \cdot g} \cdot \sin\beta^2 \cdot F \cdot \gamma',$$

und **den Seitenstoß des Windes auf eine ausweichende Fläche**, nämlich

$$P = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{(c^2 - cv)}{2g} \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot F \cdot \gamma'.$$

Zusatz I. Stößt der Wind wie nach vorigem dritten Fall zwar schief auf eine verticale Fläche, die Fläche weicht aber seitwärts und rechtwinklich der Richtung des Windes mit einer Geschwindigkeit = v aus: so ist die Geschwindigkeit, womit

*) Theorie des Windstoßes, welche in der Anwendung auf Windflügel rc. mit der Erfahrung begründet wird, von A. L. Crelle. Berlin 1802.

Bayerische Staatsbibliothek München

die Fläche nach der Richtung des Windes ausweicht, $= v = v \cdot \cot g \beta$. Daher der Seitenstoß auf die ausweichende Fläche $=$

$$P = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{c^2 - cv'}{2g} \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot F \cdot \gamma'$$

$$= \tfrac{4}{3} \cdot \frac{c^2 - cv \cdot \cot g\beta}{2g} \cdot \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot F \cdot \gamma'.$$

Auf diesem letztern Ausdruck beruht die Berechnung der Kraft des Windes auf die Flügel der Windmühlen.

Zusatz II. Das mechanische Kraftmoment $= Pv$ wird am größten, wenn $v = \frac{c}{2}$ ist.

Da es bey Windmühlen vortheilhaft ist, wenn die Mühle von jedem gelinden Winde umgetrieben werden kann, und darnach die Maschine dann eingerichtet werden muß: so muß der Winkel β bey einem gelinden oder gewöhnlichen Winde gegen 55°, und wenn man starke Winde zum Umtriebe der Mühle auch benutzen will, so muß β gegen 72° betragen.

Zusatz III. Da die Luft bey einer mittlern Temperatur 800 Mal leichter als Wasser [§. 77. Zus. II.] ist, und das Gewicht eines Cubikfusses reines Wasser $= 48{,}883$ Leipz. Pfunde [§. 9. Zus. III.] beträgt: so ist das Gewicht eines Cubikfusses Luft $= \gamma' = \frac{48{,}883}{800} = 0{,}0611$ Leipz. Pfunde.

Von dem Verfasser sind bis jetzt in unserm Verlage folgende Schriften erschienen:

Lehrbuch der Arithmetik und Geometrie. Erster Cursus, 1812. welcher die gemeine Arithmetik enthält, 8 gr.
— Zweyter Cursus, 1814., welcher die allgemeine Arithmetik, gemeine Geometrie, ebene Trigonometrie und das Nöthigste der Markscheidekunst enthält, 16 gr.
Tafel zur Berechnung der Seigerteifen und Sohlen für die Länge der flachen Schnur = 1. 1814. 3 gr.
Tafel zur Berechnung der Längen und Breiten für die Sohle = 1. m. 1 Kpfr. 1819. 4 gr.
Erste Gründe der mechanischen Wissenschaften, enthaltend die Statik, Hydrostatik, Aerostatik, Dynamik, Hydraulik und Aerodynamik, m. 7 Kpfrn. 1819. 1 thlr. 12 gr.

Craz und Gerlach.

Bayerische Staatsbibliothek München

Tab. I.

2.
A Q p p' P R q
3.
F D A E X G Q L P H R K
5
A P'' P' R R
7.
C B A P Q
8.
D A C B E P Q
9.
A B D C E P Q
10.
A B C b a K I
12.
B C D E F P' P'' P''' P''''
14.
H A K L B a b c d e f G F D E M
15.
D E B G Q
16.
A B P E Q S

Tab II.

Tab III.

41.
45.
48.
49.
53.
50.
51.
52.

Tab. V.

Tab.VI.

90.
93.
94.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Hecht, Daniel Friedrich,

Erste Gründe der mechanischen Wissenschaften

Freyberg 1819

BHS III 7
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10708253-5